АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ,
З. З. ВУЛИХ и Б. И. КАЖДАН

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## Часть I

### Выпуск 2

### НАЧАЛА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

АРТИЛЛЕРИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА

С. А. БОГОМОЛОВ, М. Е. ВОЛОКОБИНСКИЙ,
З. З. ВУЛИХ и Б. И. КАЖДАН

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

## Часть I

### Выпуск 2

### НАЧАЛА ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ
Артиллерийской академии РККА
ЛЕНИНГРАД
1933

Ответственный редактор *Краз Г. Я.*
Технический редактор *Позоева Н. М.*
Поступило в производство 16/II 1933 г.
Подписано к печати 2/II 1933 г.
Вышло в свет в феврале 1933 г.
Количество печатных знаков на листе 38.000.
Бумага печ. 72 × 105.

Ленгорлит № 2100. Арт. ак. № 9. Заказ № 618. Тираж 2.500 экз. 14 п. л.

ЛОЦТ НКВМ им. Клима Ворошилова, Ленинград (пл. Урицкого, 10).

Оглавление.

Стр.



Богомолов.

# П р е д и с л о в и е .

В настоящем II выпуске курса математического анализа § § 24-29 составлены М.Е. Волокобинским, а § § 30-36 - Б.И. Кажданом.

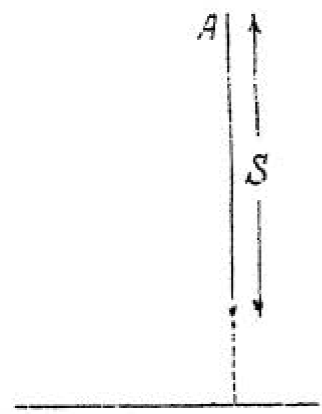
Богомолов

## § 24. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

I. а) До сих пор при решении практических задач нам приходилось находить производную заранее уже данной функции, между тем в многочисленных вопросах науки и техники имеем дело с более трудной обратной операцией: нахождения неизвестной функции по данной ее производной или данному дифференциалу.

Возьмем практические задачи.

<u>Задача I.</u> Найти путь, пройденный падающим числом за время $t$, считая от точки $A$ (черт.53), где тело находилось при $t=0$, пренебрегая сопротивлением воздуха, если известна формула скорости $v=gt$; причем $g$ - ускорение силы притяжения - вблизи земной поверхности считается постоянным. Пройденный путь, который обозначим через $s$, будет некоторая функция времени $s=f(t)$; найдем эту функцию. Из дифференциального исчисления известно, что




Черт. 53.

$$v=\frac{ds}{dt},$$

или

$$ds=v\,dt.$$

Подставляя $gt$ вместо $v$, имеем:

$$ds=gt\,dt.$$

Дифференциал искомой функции нам теперь известен; функция, от которой взят этот дифференциал, очевидно будет

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

так как

$$ds = d\left(\frac{1}{2}gt^2\right) = gt\,dt.$$

Так просто получилась формула

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

вывод которой в физике средствами элементарной математики громоздок.

Задача 2. Найти кривую $y=f(x)$, проходящую через начало координат, если в каждой точке кривой наклон касательной к оси абсцисс равен удвоенной абсциссе точки.

Наклон касательной равен $\frac{dy}{dx}$, поэтому на основании условия задачи имеем следующее дифференциальное уравнение кривой

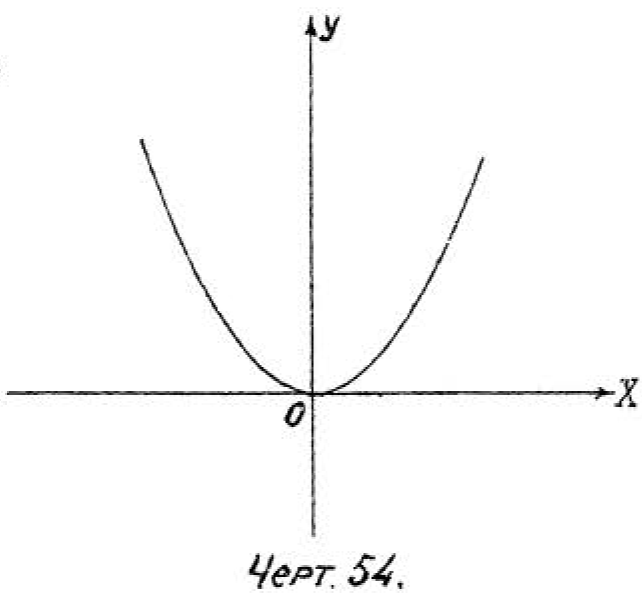
$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

или

$$dy = 2x\,dx.$$

Этот дифференциал взят от функции $x^2$; искомой кривой будет парабола $y=x^2$, ось симметрии которой совпадает с осью ординат (черт. 54)

b) При решении данных выше двух задач приходилось по данному дифференциалу отыскивать ту функцию, от которой взят дифференциал; эта функция по отношению к своей производной и дифференциалу называется первообразной функцией или неопределенным интегралом;




Черт. 54.

так функция $x^5$ будет первообразной функцией относительно функции $5x^4$ или ее интегралом: $(x^5)'=5x^4$, функция $\sin x$ будет интегралом дифференциала $\cos x dx$, потому что $d\sin x=\cos x dx$.

Вообще:

1) Неопределенным интегралом данной функции называется такая функция, производная которой равна данной функции: если

$$[\varphi(x)]'=f(x) \qquad (1),$$

то функция $\varphi(x)$ будет неопределенным интегралом функции $f(x)$.

2) Неопределенным интегралом данного дифференциала называется такая функция, дифференциал которой равен данному дифференциалу: если

$$d\varphi(x)=f(x)dx \qquad (2),$$

то функция $\varphi(x)$ будет неопределенным интегралом дифференциала $f(x)dx$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем (см.стр.4 и 5) станет ясным: почему взято выражение "неопределенный интеграл" вместо "интеграл".

Операция нахождения функции, дифференциал которой равен данному дифференциалу, называется интегрированием и обозначается знаком $\int$, о чем будет сказано дальше.

Интегрирование есть операция обратная дифференцированию, т.е. является обращением процесса дифференцирования; обращение процессов - одно из самых плодотворных начал в математике.

Возьмем функцию $3x^2$ и, чтобы не упоминать о том, что ее следует рассматривать, как производную другой функции, сделаем запись в виде дифференциала $3x^2dx$; можно найти бесчисленное множество функций, отличающихся друг от друга постоянной величиной, как-то:

$$x^3;\ x^3+2;\ x^3-1\tfrac{1}{2};\ x^3+7\tfrac{1}{4} \text{ и т.д.}$$

имеющих одну и ту же производную, именно данную нам функцию $3x^2$, и один и тот же дифференциал $3x^2dx$; общим выражением всех этих первообразных функций, или всех этих интегралов будет $x^3+C$, где $C$ любое число. Требование найти любую первообразную функцию (так сказать: все первообразные функции или все интегралы) от функции $3x^2$ символистически записывается так: $\int 3x^2dx$; принимая во внимание общее выражение первообразной функции, получаем равенство:

$$\int 3x^2dx=x^3+C.$$

В общем виде имеем:

$$\int f(x)dx=\varphi(x)+C \qquad (3).$$

Эта формула служит базисом всего интегрального исчисления. Знак $\int$ называется знаком интеграла, функция $f(x)$ под'интегральной функцией, выражение $f(x)dx$ — под'интегральным выражением, $C$ - постоянной интегрирования; функция $\varphi(x)$ есть одна из первообразных функций; под $C$ подразумевают любую постоянную величину, независящую от переменной интегрирования, в данном случае от $x$; так как $\varphi(x)+C$ есть общее выражение первообразной функции, то идентичный ему символ $\int f(x)dx$, так сказать, включает в себя произвольную постоянную величину. Давая $C$ различные значения получим бесчисленное множество интегралов, которые условимся называть частными интегралами. При решении практических задач имеется наличность условий, дающих возможность найти значение $C$, — но пока этого нет, $C$ остается неопределенным и интеграл $\int f(x)dx$ называется неопределенным.

Возьмем примеры. Требуется найти интеграл, или, как говорят, взять интеграл

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x};$$

одной из первообразных функций очевидно будет $tg x$, потому что

$$d tg x=\frac{dx}{\cos^2 x};$$

прибавляя к полученной первообразной функции $C$, получаем:

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tg x+C.$$

Точно также находим:

$$\int(3x^2-2x)dx=x^3-x^2+C;$$

проверим полученный результат дифференцированием:

$$d(x^3-x^2+C)=(3x^2-2x)dx.$$

Упражнения. Решите данные ниже примеры и проверьте полученные результаты дифференцированием.

$$\int 7x^6dx;\ \int\cos x dx;\ \int\sin x dx;$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x};\int\frac{dx}{\sin^2 x};\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ \int\frac{dx}{1+x^2};$$

$$\int e^x dx;\ \int\frac{dx}{x};\ \int a^x\ln a dx.$$

c) Постоянная интегрирования. Вернемся к задачам, разобранным в начале параграфа; при решении их мы умолчали о постоянной интегрирования. В первой задаче (см. стр. 1 ) при определении пути, пройденного свободно падающим телом, приходилось найти интеграл

$$\int gt\,dt;$$

ответ будет

$$\int gt\,dt=\frac{1}{2}gt^2+c,$$

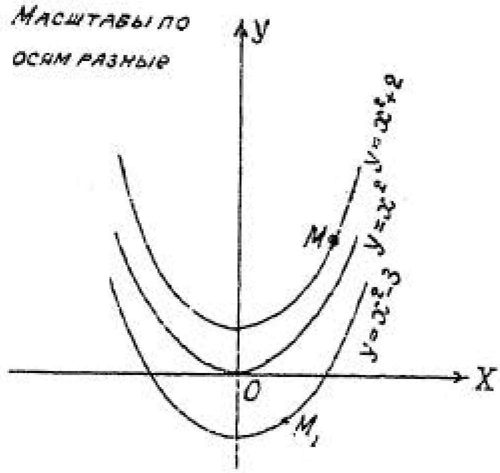
следовательно

$$s=\frac{1}{2}gt^2+c.$$

По условию задачи при $t=0$ и $s=0$; подставляя значения $t$ и $s$ в уравнение пройденного пути, имеем:

$$0=\frac{1}{2}g\cdot 0+c,$$

откуда $c=0$, – следовательно: $s=\frac{1}{2}gt^2$. Во второй (см.стр. 2 ) задаче нам приходилось находить интеграл $\int 2x\,dx$; одной из первообразных функций будет $x^2$, тогда $\int 2x\,dx=x^2+c$ и для уравнения кривой получаем: $y=x^2+c$. Так как $c$ может быть какой-угодно постоянной величиной, то, давая $c$ различные значения, получим бесконечное множество парабол (черт.55)-семейство парабол, ось симметрии которых совпадает с осью $Oy$. По условию задачи парабола должна проходить через начало координат, следовательно координаты этой точки должны удовлетворять уравнению кривой; подставляем их в уравнение кривой: $0=0+c$, значит $c=0$; тогда $y=x^2$; результат получается прежний. Предположим теперь, что кривая должна проходить не через начало координат, а через точку $M(2;6)$; тогда координаты этой точки должны удовлетворять уравнению $y=x^2+c$, поэтому: $6=2^2+C$; $C=2$. Уравнением искомой кривой будет $y=x^2+2$. Если парабола проходит через точку $M_1(1;-2)$, то для уравнения этой кривой имеем $y=x^2-3$. Таким образом на примере этой задачи мы видим, что неопределенность $C$ имеет




Черт. 55.

свои удобства: имея в своем распоряжении общее выражение первообразной функции, мы можем выбрать ту из первообразных функций, которая удовлетворяет условиям задачи.

Найдите сами кривую, проходящую через точку $M(2;9)$ если наклон касательной в каждой точке кривой равен $3x^2$.

Исходя теперь из общей формулы

$$\int f(x)dx=\varphi(x)+C,$$

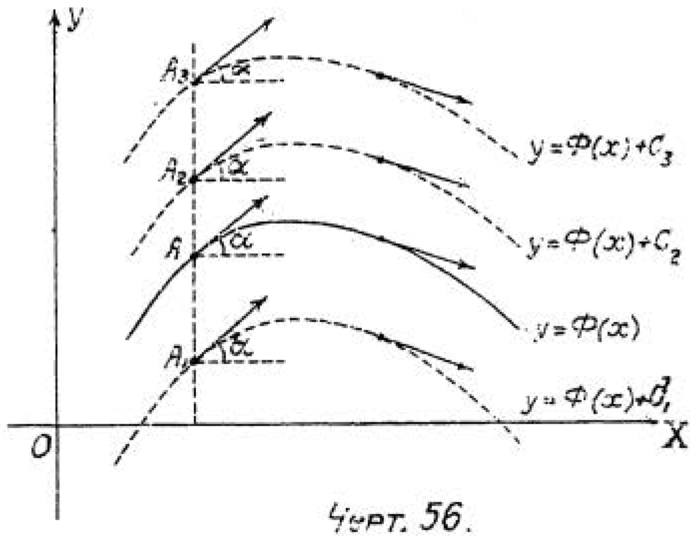
легко дать геометрическое толкование тому факту, что $C$ получает всевозможные значения.

Пусть $C=0$, тогда $y=\varphi(x)$ одна из первообразных функций, графиком которой на плоскости будет некоторая кривая (см. черт. 56). Давая $C$ различные значения $c_1$; $c_2$; $c_3$ — получим ряд кривых $y=\varphi(x)+c_1$; $y=\varphi(x)+c_2$; $y=\varphi(x)+c_3$. При одном и том же значении $x$, скажем $x=a$, производная этих функций будет одна и та же, следовательно наклон касательных к кривым в точках $A_1$; $A$; $A_2$; $A_3$ будет один и тот же $tg\alpha=f(a)$. Все кривые получены перемещением кривой $y=\varphi(x)$ параллельно оси $Oy$ и все семейство кривых как бы представляет "одну кривую", но различно расположенную относительно оси $Oy$.

Если при решении практической задачи дается значение одного из частных интегралов, то $C$ (см. общую формулу) становится вполне определенным; пусть при $x = a$ имеем, что

$$\varphi(a) + C = b,$$

причем $b$ известно, тогда $C = b - \varphi(a)$.




Черт. 56.

Геометрически это равносильно тому, что кривая должна проходить через определенную точку

$$M(x_0;\ y_0)$$

т.е. кривая, как будто, закрепляется. Так как координаты точки должны удовлетворять уравнению кривой, то

$$y_0 = \varphi(x_0) + C;$$

отсюда

$$C = y_0 - \varphi(x_0)$$

и следовательно:

$$y = \varphi(x) + y_0 - \varphi(x_0).$$

## 2. Общие свойства неопределенного интеграла.

При решении задачи на падение тела в пустоте результат интегрирования был взят готовым и только проверен посредством дифференцирования; в нашем распоряжении нет еще аппарата интегрирования, поэтому займемся изучением общих свойств неопределенного интеграла.

1) Производная от неопределенного интеграла равна под'интегральной функции, а дифференциал его под'интегральному выражению.

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x); \qquad (4)$$

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \qquad (5)$$

Примеры: $d\int \sin x dx = \sin x dx$; $\left[\int e^x dx\right]' = e^x$; $d\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Это свойство вытекает из самого определения интеграла и им уже пользовались при проверке результатов интегрирования посредством дифференцирования; действительно исходя из основной формулы

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C,$$

имеем:

$$d\left[\varphi(x)+C\right] = d\int f(x)dx;$$

$$d\varphi(x) = f(x)dx,$$

т.е. в результате проверки полученного результата путем дифференцирования должно получиться под'интегральное выражение; пример:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C; \quad d\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\right] = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a}dx = \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Упражнения. Проверьте полученные результаты дифференцированием:

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C; \quad \int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C; \quad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. На основании рассмотренного свойства знаки $d$ и $\int$ (ур.5) сокращаются; интегрирование вводит произвольную постоянную, дифференцирование ее уничтожает. Спрашивается, что получится, если переставить знаки; пусть имеется функция $f(x)$, возьмем от нее дифференциал $df(x)$, а теперь снова интеграл $\int df(x)$; одна из первообразных функций очевидно будет $f(x)$, так как $df(x)$ равен под'интегральному выражению; общее выражение первообразной функции $f(x)+C$ и так

$$\int df(x)=f(x)+C;$$

но если не принимать во внимание постоянной интегрирования, то можно сказать, что и знаки $\int$ и $d$ поставленные рядом, сокращаются.

3) Если две функции или два дифференциала тождественны, то неопределенные интегралы от них могут отличаться лишь на постоянную величину.

При интегрировании одной и той же функции различными приемами могут получиться различные по виду неопределенные интегралы, между тем они будут отличаться друг от друга только постоянной величиной, т.е. разность этих интегралов - величина постоянная. Пусть при интегрировании дифференциала $f(x)dx$ получилось

$$\int f(x)dx=\Phi(x)+C \qquad \int f(x)dx=F(x)+C_1;$$

если интегрирование произведено правильно, то на основании первого свойства имеем:

$$d\left[\Phi(x)+C\right]=d\Phi(x)=f(x)dx \qquad d\left[F(x)+C_1\right]=dF(x)=f(x)dx;$$

оба интеграла имеют один и тот же дифференциал, а если две функции имеют один и тот же дифференциал, то разность этих функций - величина постоянная. На основании этого (2-го) свойства найдя для дифференциала $f(x)dx$ только одну из первообразных функций $\varphi(x)$ и прибавив слагаемое $C$, имеем в своем распоряжении любую первообразную функцию; какой-либо первообразной функции от $f(x)$, не заключающейся в формуле $\int f(x)dx = \varphi(x)+C$, быть не может. Произвольная постоянная приписывается в конце по окончании операции интегрирования. Возьмем пример:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln Cx$$

и

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$$

где $C$ постоянная интегрирования; дифференцирование для разности интегралов дает

$$d\left[\ln Cx - \ln x\right] = \frac{1}{Cx} \cdot C\,dx - \frac{dx}{x} = \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x} = 0;$$

можно простым преобразованием показать, что результаты одинаковы:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln Cx = \ln x + \ln C;$$

так как $C$ произвольная величина, то вместо $\ln C$ можно просто написать $C$, тогда

$$\int \frac{dx}{x} = \ln Cx = \ln x + C$$

(произвольная постоянная была включена в логарифм).

ЗАМЕЧАНИЕ. Различные формы постоянной интегрирования:

$$aC;\ \frac{C}{a};\ C^2;\ \ln C;\ e^C \quad \text{и т.д.}$$

равносильны $C$; выражение из произвольных постоянных величин, как-то: $C+C_1-C_2$ или $C_1C_2$, получение в результате одного интегрирования по одному аргументу, заменяются одним $C$, которое может быть даже функцией другого аргумента, если по этому аргументу интегрирования не производится.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и вносить под знак интеграла

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Если результат верен, то на основании свойство I-го дифференциал от правой части равенства должен равняться под' интегральному выражению левой части:

$$d\left[A\int f(x)dx\right] = A\,d\int f(x)dx = Af(x)dx.$$

Пример:

$$\int a\cos x\,dx = a\int \cos x\,dx = a\sin x + C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. На основании свойства 2-го произвольную постоянную пишем в конце; если же операцию произвести таким образом:

$$\int a\cos x\,dx = a\int \cos x\,dx;$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

следовательно:

$$\int a\cos x\,dx = a(\sin x + C) = a\sin x + aC = a\sin x + C$$

(см.замечание на стр. II ), то получается только удлинение записи.

4) Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов слагаемых.

$$\int\left[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx-\int\psi(x)dx.$$

Берем дифференциал от правой части равенства:

$$d\left[\int f(x)dx+\int\varphi(x)dx-\int\psi(x)dx\right]=d\int f(x)dx+d\int\varphi(x)dx-d\int\psi(x)dx=\left[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)\right]dx;$$

получается подынтегральное выражение левой части, тогда на основании свойства I-го результат верен.

Пример:

$$\int(\cos x+\sin x-1)dx=\int\cos x dx+\int\sin x dx-\int dx=\sin x-\cos x-x+C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. На основании свойства 2-го произвольную постоянную пишем в конце; нет смысла присоединять произвольную постоянную к каждому члену; вместо $C_1+C_2+C_3$ берем просто $C$ (см. замечание на стр. II ).

3. Основные формулы. а) Вывод формул.

Основные формулы интегрирования функций получаются из соответственных формул дифференцирования, так как каждая формула на дифференцирование служит одновременно и формулой интегрирования.

I) Формулы для интегрирования алгебраических функций.

Из формулы $du^n=nu^{n-1}du$, где $u$ может быть как аргументом, так и функцией, получаем:

$$u^{n-1}du=\frac{1}{n}du^n;\ \int u^{n-1}du=\frac{1}{n}\int du^n;\ \int u^{n-1}du=\frac{u^n}{n}+C;$$

чтобы сделать формулу удобною для пользования, подставим $n+1$ вместо $n$, тогда:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C. \qquad (6)$$

Так как формула дифференцирования верна при всяком $n$, то и полученная формула верна при всяком $\bar{n}$, за исключением $n=-1$: в знаменателе правой части получается тогда нуль. При $n=-1$ интеграл вычисляется по другой формуле.

Из формулы $d\ln u = \frac{du}{u}$ получаем:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C. \qquad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При отрицательном $u$ в правой части берется $\ln|u|$ действительно:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-du}{-u} = \int \frac{d(-u)}{(-u)} = \ln|-u| + C;$$

об'единяя обе формулы в одну, имеем:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

Точно также получаем:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arcctg} u + C, \qquad (8)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C. \qquad (9)$$

2) Формулы для интегрирования тригонометрических функций получаются подобным же путем:

$$\int \sin u\, du = -\cos u + C, \qquad (10)$$

$$\int \cos u\, du = \sin u + C, \qquad (11)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C, \qquad (12)$$

$$\int\frac{du}{\cos^2 u}=tg\,u+C. \tag{13}$$

3) Формулы для интегрирования показательных функций получаются также просто из формул дифференцирования:

$$\int e^u du=e^u+C, \tag{14}$$

$$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C. \tag{15}$$

Во всех выведенных формулах $u$ может быть как аргументом, так и функцией.

б) Упражнения. Формулы интегрирования, охватывающие собою только несколько функций, не могут быть применимы непосредственно подобно формулам дифференциального исчисления: нужно знание специальных приемов преобразования под'интегрального выражения, чтобы интегрирование возможно было подвести к одной из данных 10 формул (непосредственного интегрирования); поэтому даваемые упражнения касаются преимущественно главных свойств и очень важной для решения практических задач первой формулы; преобразования под'интегрального выражения в этом случае - элементарны.

Решенные примеры.

1) $\int x\,dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{x^2}{2}+C$; 2) $\int x^2dx=\frac{x^{2+1}}{2+1}+C=\frac{x^3}{3}+C$; 3) $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$.

4) $\int\sqrt{x^3}\,dx=\int x^{1\frac{1}{2}}dx=\frac{x^{1\frac{1}{2}+1}}{1\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{2\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}}+C=\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+C.$

5) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C=3\sqrt[3]{x}+C.$

6) $\int\frac{ax^3dx}{2}=\frac{a}{2}\int x^3dx=\frac{a}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{1}{8}ax^4+C.$

7) $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx=2a\int x^{-\frac{1}{2}}dx-b\int x^{-2}dx+3c\int x^{\frac{2}{3}}dx=$

$=2a\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-b\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+3c\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+C=4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9}{5}cx\sqrt[3]{x^2}+C.$

8) $\int\frac{(at-bt\cos^3t+c\sqrt{t}\cos^2t)\,dt}{t\cos^2t}=\int\left(\frac{a}{\cos^2t}-b\cos t+ct^{-\frac{1}{2}}\right)dt=$

$=a\int\frac{dt}{\cos^2t}-b\int\cos t\,dt+c\int t^{-\frac{1}{2}}dt=a\,tg\,t-b\cos t+2c\sqrt{t}+C.$

Проверьте результат дифференцированием.

9) $\int\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{u})^3du}{u}=\int\frac{(a\sqrt{a}-3a\sqrt{u}+3\sqrt{a}u-u\sqrt{u})\,du}{u}=$

$=a\sqrt{a}\int\frac{du}{u}-3a\int u^{-\frac{1}{2}}du+3\sqrt{a}\int du-\int u^{\frac{1}{2}}du=a\sqrt{a}\ln u-6a\sqrt{u}+3\sqrt{a}u-\frac{2}{3}u\sqrt{u}+C.$

10) $J=\int\frac{ye^y-ya^xb^y-xe^y+xa^xb^y}{y-x}dy$

( $y$ аргумент, $x$ постоянная); разделим числитель на знаменатель, тогда:

$$J=\int(e^y-a^xb^y)dy=\int e^ydy-a^x\int b^ydy=e^y-\frac{a^xb^y}{\ln b}+C.$$

11) $\int\frac{3az^3+3az+b}{z^2+1}dz=\int\left(3az+\frac{b}{z^2+1}\right)dz=3a\int z\,dz+b\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{3}{2}az^2+b\,arctg\,z+C$

12) $\int(5a^2x^3)^2d(5a^2x^3)=\frac{1}{3}(5a^2x^3)^3+C$; 13) $\int\cos(x+a)\,d(x+a)=\sin(x+a)+C.$

14) $\int\frac{d(p^2)}{\sqrt{1-(p^2)^2}}=arcsin\,p^2+C$; $\int\frac{d(5u^2+3)}{(5u^2+3)}=\ln(5u^2+3)$; $\int e^{3x^2}d3x^2=e^{3x^2}+C$

Решите примеры (результаты проверьте дифференц.)

1) $\int\frac{dp}{(dp)^{0,4}}$; 2) $\int(\sqrt{v}+1)(v-\sqrt{v}+1)dv$; 3) $\int\frac{m^2-3m+2}{\sqrt{m}}dm$;

4) $\int(a^{\frac{2}{3}}-u^{\frac{2}{3}})^3du$; 5) $\int\frac{(3z\sec^2z-2az\csc^2z+b)\,dz}{z}$; 6) $\int\left[(\sec\varphi+\mathrm{cosec}\,\varphi)^2-\frac{2}{\sin\varphi\cos\varphi}\right]d\varphi$;

7) $\int\frac{(na^n-bn\cos n+c)\,dn}{n}$; 8) $\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$; 9) $\int\left(\frac{\cos^2f-\sin^2f}{\cos f-\sin f}+\frac{2a}{f}\right)df$;

$$10)\int\left(\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}+\frac{a}{1+\varphi^2}\right)d\varphi;\quad 11)\int\frac{(av-\sqrt{1-v^2})\,dv}{v\sqrt{1-v^2}};\quad 12)\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}dx;$$

$$13)\int\frac{d(a+x)}{(a+x)};\quad 14)\int\frac{d(x^2)}{x^2};\quad 15)\int\frac{dax}{1+(ax)^2};\quad 16)\int\frac{d(a+z)}{\sqrt{1-(a+z)^2}};\quad 17)\int\frac{d(\sqrt{ax})}{1+(\sqrt{ax})^2};$$

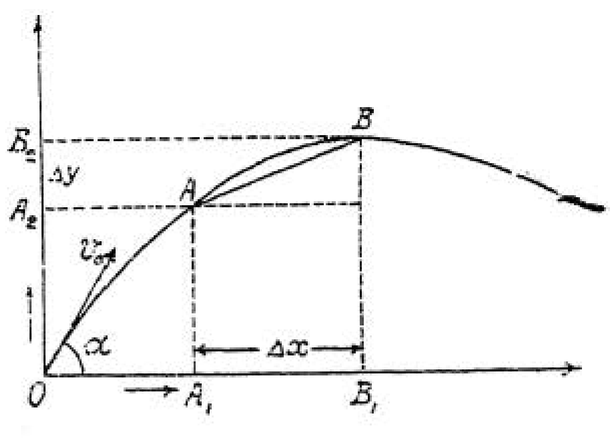
$$18)\int e^{3x^2+1}d(3x^2+1);\quad 19)\int a^{l^2-4}d(l^2-4);\quad 20)\int 3(a+x)\,d(a+x);\quad 21)\int\cos(v-1)\,d(v-1);$$

$$22)\int\frac{d(p^2)}{\cos^2(p^2)};\quad 23)\int\frac{d(l^2+3)}{(l^2+3)};\quad 24)\int\frac{d\sin u}{\sin u};\quad 25)\int(3y^2+2y)^2\,d(3y^2+2y).$$

*c)* **Практические задачи.** Приемов интегрирования мы еще не знаем, но в нашем распоряжении уже имеется некоторый аппарат, и желающие могут в порядке соцсоревнования познакомиться с применением этого аппарата к решению практических задач.

Задача I. Снаряд вылетает из орудия с начальной скоростью $v_0$ под углом $\alpha$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая ускорение притяжения земли постоянным, определить движение снаряда.

Будем рассматривать ядро, как материальную точку, которая движется в плоскости чертежа (черт. 57) по кривой $OAB$; ось абсцисс - горизонтальная линия, ось ординат - вертикальная.



Черт. 57.

Пока тело движется от точки $A$ до точки $B$ его горизонтальная проекция, которую тоже можно представить как движущуюся точку, движется от точки $A_1$ до точки $B_1$

и пройдет путь $\Delta x$ средняя скорость этой второй точки будет $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, а скорость в точке $A$, — $\frac{dx}{dt}$; обозначая проекцию скорости тела на ось $OX$ через $v_x$, имеем

$$v_x=\frac{dx}{dt};$$

точно также для проекции по оси $Oy$ найдем

$$v_y=\frac{dy}{dt}.$$

Из дифференциального исчисления для ускорения имеем формулу

$$w=\frac{dv}{dt},$$

на основании которой для проекций ускорения получим:

$$w_x=\frac{dv_x}{dt} \quad \text{и} \quad w_y=\frac{dv_y}{dt}.$$

Пусть $x$ и $y$ будут некоторые функции времени (т.е. предположим, что траектория задана параметрически): $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$. Найдем эти функции.

Начальная скорость никакого ускорения не дает, так что приходится говорить только об ускорении силы притяжения; последнее направлено вертикально вниз (т.е. перпендикулярно к оси $Ox$), следовательно проекция ускорения на ось $Ox$ будет равно нулю, а на ось $Oy$ равна $-g$ (ось $Oy$ направлена вверх, а сила притяжения вниз). Итак получили $w_x=0$; $w_y=-g$; тогда на основании формул

$$w_x=\frac{dv_x}{dt} \quad \text{и} \quad w_y=\frac{dw_y}{dt}$$

имеем:

$$\frac{dv_x}{dt}=0 \text{ и } \frac{dv_y}{dt}=-g, \quad \text{или} \quad dv_x=0 \text{ и } dv_y=-g\,dt.$$

Интегрирование дает:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=C_1; \\ v_y&=-gt+C_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Чтобы различить произвольные постоянные, полученные при каждом из двух интегрирований, поставлены внизу значки.

Чертеж указывает, что в точке $O$, где тело находилось при $t=0$, проекции начальной скорости на оси координат соответственно равны

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{и} \quad v_y = v_0 \sin\alpha .$$

Подставляя эти значения в (уравн.I) и помня, что в начале движения $t=0$, находим $v_0 \cos\alpha = C_1$ и $v_0 \sin\alpha = g\cdot 0 + C_2$, или: $C_1 = v_0 \cos\alpha$ и $C_2 = v_0 \sin\alpha$. Уравнения (I) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha ; \\ v_y &= -gt + v_0 \sin\alpha . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Так как

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{и} \quad v_y = \frac{dy}{dt},$$

то вместо уравнений (2) получаем:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha ,$$

Интегрируем полученные уравнения

$$x = \int v_0 \cos\alpha \, dt = v_0 \cos\alpha \int dt = (v_0 \cos\alpha) t + C_3 ;$$

$$y = \int -gt\,dt + \int v_0 \sin\alpha \, dt = -g\int t\,dt + v_0 \sin\alpha \int dt = -\frac{gt^2}{2} + (v_0 \sin\alpha) t + C_4 .$$

Итак имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= t v_0 \cos\alpha + C_3 ; \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 + t v_0 \sin\alpha + C_4 . \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Здесь снова, чтобы различить постоянные интегрирования поставлены значки.

При $t=0$ очевидно, что и $x=0$ и $y=0$, тогда уравнения (3) дают:

$$0=0.v_0\cos\alpha+C_3 \quad \text{или} \quad C_3=0;$$

$$0=-\frac{1}{2}g.0+0.v_0\sin\alpha+C_4 \quad \text{или} \quad C_4=0.$$

Итак окончательно находим параметрические уравнения траектории:

$$\left.\begin{aligned} x&=tv_0\cos\alpha \\ y&=tv_0\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

В курсе внешней балистики (см. "Внешняя и внутренняя балистика" Окунева, изд. 1930 г.) делаются интересные выводы из уравнений (4); здесь заметим только, что при $\alpha=90^\circ$ эти уравнения имеют вид:

$$x=0; \qquad y=tv_0-\frac{1}{2}gt^2$$

( получается формула движения тела, брошенного вертикально вверх). Изменяя знак при $g$, т.е. направляя ось $Oy$ вниз, будем иметь формулу падающего тела с начальной скоростью $v_0$, именно: $y=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$.

Выведите сами формулу падающего тела с начальной скоростью $v_0=30$ м|сек.

<u>Задача 2.</u> Найти функцию $y=f(x)$ по данному дифференциальному уравнению $y'=ay$.

Представим данное уравнение в виде более удобном для интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} y'=ay; \qquad \frac{dy}{dx}=ay; \\ dy=ay\,dx \end{aligned}\right| \qquad (1).$$

В правой стороне уравнения две переменные: $x$ и $y$, – необходимо для интегрирования отделить переменные, т.е. сделать так, чтобы в каждой части было по одной переменной; разделим обе части уравнения (1) на $y$, тогда:

$$\frac{dy}{y}=a\,dx;$$

интегрирование дает:

$$\int\frac{dy}{y}=\int a\,dx;\ \int\frac{dy}{y}=a\int dx;\ \ln y=ax+C.$$

На основании замечания на стр. 11 имеем:

$$\ln y=ax+\ln C,$$

отсюда:

$$\ln y-\ln C=ax;\ \ln\frac{y}{C}=ax;\ \frac{y}{C}=e^{ax}$$

и окончательно:

$$y=Ce^{ax} \qquad (2).$$

Проверим результат: $y=Ce^{ax}$; $y'=Cae^{ax}$; подставляя выражения для $y$ и $y'$ в данное в условии задачи уравнение $y'=ay$, получаем $Cae^{ax}=aCe^{ax}$, т.е. уравнение решено верно.

Из дифференциального исчисления известно, что скорость изменения функции равна производной, тогда уравнение $y'=ay$ показывает, что скорость изменения функции пропорциональна самой функции ( $a$ коэффициент пропорциональности); таким свойством обладает только функция $y=Ce^{ax}$, имеющая большое значение при решении многих практических задач, к которым сейчас и перейдем, заметив сначала, что уравнению $y'=ay$ можно дать вид:

$$\frac{dy}{dx}=ay$$

или

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=ay \qquad (3)$$

<u>Вывод.</u> Если при тщательно проведенном эксперименте получилась приближенная формула

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx ay,$$

то можно с достаточной степенью вероятности утверждать, что в этом случае аргумент и функция связаны уравнением

$$y=Ce^{ax}.$$

<u>Задача 3.</u> Охлаждение тела в окружающей среде.

Пусть в момент $t$ температура тела - $Q$, температура окружающей среды - $\vartheta$, тогда в момент $t$ разность температур: $Q-\vartheta$, которую обозначим через $u$; изменение этой разности за время $\Delta t$ будет $\Delta u$.

По закону Ньютона быстрота изменения разности температур пропорциональна самой разности температур, т.е.

$$\lim\frac{\Delta u}{\Delta t}=-ku,$$

где $k$ положительная величина, зависящая от свойства тела.

Обратим сначала внимание на знак минус. Предполагая, что окружающая среда получает приток теплоты только со стороны тела, мы должны допустить, что $u$ уменьшается и поэтому скорость охлаждения, на основании данной Ньютоном формулы, должна падать, а следовательно надлежит поставить знак минус. Чтобы получить ответ на задачу, надлежит только на основании вывода в конце второй задачи в формулу $y=Ce^{ax}$ вместо $y, a, x$ подставить соответственно $u, -k, t$, тогда: $u=Ce^{-kt}$ (ур. I

Пусть в момент начала охлаждения тела, т.е. при $t=0$, температуры тела и окружающей среды были $Q_0$ и $\vartheta_0$, тогда $u_0=Q_0-\vartheta_0$. Из уравнения (I) имеем:

$$u_0=Ce^{-k\cdot 0}; \quad C=u_0; \quad C=Q_0-\vartheta_0.$$

Уравнение (I) можно переписать так:

$$Q-\vartheta=(Q_0-\vartheta_0)e^{-kt}. \qquad (2)$$

Полученное уравнение дает возможность, зная начальную температуру тела и среды и коэффициент $k$, узнать разность температур в любой момент. Считая массу среды безгранично большой сравнительно с массой тела, мы можем допустить, что температура среды остается той же самой, как и при начале охлаждения, т.е. в момент $t=0$. Подставляя $\vartheta_0$ в уравнение (2) вместо $\vartheta$, получаем окончательно:

$$\underline{Q=\vartheta_0+(Q_0-\vartheta_0)e^{-kt}} \qquad (3).$$

Зная температуру среды, начальную температуру тела и коэффициент $k$, можно в любой момент узнать температуру охлаждающегося тела.

Если температура среды равна $0$, то уравнение (3) получает вид:

$$\underline{Q=Q_0e^{-kt}} \qquad (4)$$

<u>Задача 4.</u> <u>Разряд конденсатора.</u> Пусть напряжение конденсатора $u$, падение этого напряжения $\Delta u$. Скорость падения напряжения пропорциональна самому напряжению, т.е.:

$$\frac{du}{dt}=-ku$$

(относительно знака минуса см. предыдущую задачу); отсюда, как и в предыдущей задаче, имеем: $u=Ce^{-kt}$, если при $t=0$ напряжение конденсатора $u_0$, то формула получает вид:

$$u=u_0 e^{-kt}.$$

Задача 5. Химическая реакция для случая одного вещества в растворе. Обозначим количество вещества, бывшего в растворе в начале реакции, т.е. при $t=0$, через $a$, - количество вещества вступившего в реакцию к моменту $t$ через $x$; тогда количество оставшегося вещества в момент $t$ будет $a-x$, изменение этого количества: $\Delta(a-x)$. По данным химии скорость уменьшения оставшегося вещества должна быть пропорциональна оставшемуся веществу:

$$\frac{d(a-x)}{dt}=-k(a-x),$$

или, обозначая $a-x$ через $u$, имеем:

$$\frac{du}{dt}=-ku;$$

отсюда:

$$u=Ce^{-kt}.$$

При $t=0$, т.е. при начале реакции, $x=0$, так как разложившегося вещества еще не будет, следовательно из уравнения $u=Ce^{-kt}$ получаем: $a-x=Ce^{-kt}$; $a-0=Ce^{-k\cdot 0}$; $c=a$, тогда $a-x=ae^{-kt}$ или:

$$x=a(1-e^{-kt}).$$

По этой формуле в любой момент можно вычислить количество вещества вступившего в реакцию (относительно знака минус перед коэффициентом см. задачу № 3).

Задача 6. Распад радия. Скорость, с которою уменьшается количество радия пропорциональна оставшемуся в данный момент количеству радия. Пусть количество оставшегося радия в момент $t$ будет $x$, тогда $\frac{dx}{dt}=-kx$;

откуда находим $x=Ce^{-kt}$. Если количество радия при $t=0$ равно $a$ то формула примет вид:

$$\underline{x=ae^{-kt}}$$

( на счет знака коэфф. пропорц. см. задачу 3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Последние четыре задачи дают представление о том значении, которое имеет показательная функция в самых разнообразных приложениях. В задаче второй мы решили дифференциальное уравнение $y'=ay$, характеризующее показательную функцию, а затем применяли готовую формулу к решению задач.

Приведем теперь две задачи другого характера.

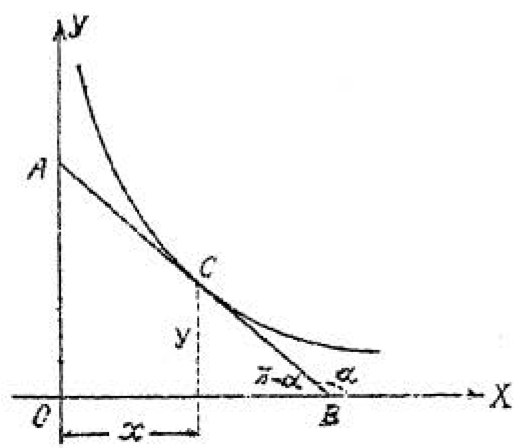
Задача 7. Найти такую кривую, чтобы отрезок касательной, заключенный между осями координат, делился в точке касания пополам. Кривая проходит через точку $M$ (3,12)

По условию задачи отрезок касательной $AB$ (черт.58) в точке касания $C$ делится пополам; следовательно $AB=2AC$, тогда $OB=2x$ и $OA=2y$.

Из треугольника $AOB$ имеем:

$$tg(\pi-\alpha)=\frac{OA}{OB}; \quad -tg\alpha=\frac{2y}{2x};$$

$$tg\alpha=-\frac{y}{x}.$$




Черт. 58.

Так как $tg\alpha=y'$, то $y'=-\frac{y}{x}$

или $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$. После отделения переменных получим:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x};$$

интегрирование дает:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln y=-\ln x+C.$$

Положив $C=\ln a$, имеем:

$$\ln y+\ln x=\ln a;\ \ln xy=\ln a;\ xy=a.$$

Получалось семейство равнобочных гипербол; выберем из них ту гиперболу, которая проходит через точку $M(3;12)$; подставляем координаты точки в полученное уравнение кривой: $xy=a;\ 3\cdot 12=a;\ a=36.$

Итак, искомое уравнение кривой: $xy=36$.

Задача 8. Для платины теплоемкость $c$ выражается в зависимости от температуры $\vartheta^\circ$ эмпирической формулой $c=0{,}0317+0{,}000012\,\vartheta$. Найти формулу для количества тепла $P$, нужного для нагревания 1 г платины от $0^\circ$ до $\vartheta^\circ$.

Пусть мы увеличили температуру 1 г платины от $0^\circ$ до $\vartheta^\circ$, для чего потребовалось $P$ малых калорий, тогда в среднем для повышения температуры на один градус нужно $\frac{P}{\vartheta}$ малых калорий; это и будет средней теплоемкостью от $0^\circ$ до $\vartheta^\circ$. Если при увеличении температуры на $\Delta\vartheta^\circ$ понадобилось $\Delta P$ малых калорий, то средняя теплоемкость равна $\frac{\Delta P}{\Delta\vartheta}$; для теплоемкости же при $\vartheta^\circ$ имеем $\lim\frac{\Delta P}{\Delta\vartheta}$ или $\frac{dP}{d\vartheta}$. Так как в условии задачи (см. формулу) теплоемкость обозначена через $c$, то подставляя в данную формулу вместо $c$ выражение $\frac{dP}{d\vartheta}$ получаем:

$$\frac{dP}{d\vartheta}=0{,}0317+0{,}000012\,\vartheta;$$

откуда:

$$dP=0{,}0317\,d\vartheta+0{,}000012\,\vartheta\,d\vartheta;$$

после интегрирования:

$$P=0{,}0317\,\vartheta+0{,}000006\,\vartheta^2+C.$$

Если $\vartheta=0$, то и $P=0$, так как температура платины не повышается, тогда $C=0$.

Итак искомая формула будет:

$$P=0{,}0317\vartheta+0{,}0000006\vartheta^2$$

Упражнение. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости $\omega$. Выразить $\omega$ в функции от времени $t$.

## § 25. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

При решении рассмотренных легких практических задач мы пользовались запасом немногих сведений из интегрального исчисления. Некоторые из вопросов техники настолько трудны, что для разрешения их недостаточен могучий современный математический аппарат, над углублением которого работают многие. В нашем же распоряжении почти нет пока никакого аппарата. Как было уже замечено (на стр. 15 ) формулы интегрирования непосредственно применимы только к нескольким функциям и необходимо знание особых методов преобразования под'интегральной функции с целью подведения данного интеграла к одной из основных формул. Изучив основные методы интегрирования, мы применим их к интегрированию только некоторых функций, так как более подробное знакомство с интегрированием будет дано впоследствии.

I. Метод замены переменной (или подстановки).

а) Сущность метода. При этом методе иногда бывает необходим подсобный ему прием предварительно частичного преобразования под'интегральной функции.

Замена переменной бывает двух типов; познакомимся сначала с первым.

Пусть требуется найти интеграл $J=\int f(x)\,dx$. Положим $x=\varphi(t)$; так как $x$ является теперь уже функцией, то и $dx$ будет функцией:

$$dx=\varphi(t)'dt.$$

Искомый интеграл примет вид:

$$J=\int[\varphi(t)]\,\varphi(t)'dt. \qquad (1)$$

Если подстановка взята умело, то вновь полученный интеграл должен оказаться проще прежнего. Предположим, что нам теперь удалось произвести интегрирование и полученный результат будет:

$$J=\Phi(t)+C \qquad (2)$$

Функция замены переменной $x=\varphi(t)$ и ее производная обязательно должны быть непрерывны и однозначны в данном промежутке, кроме того уравнение $x=\varphi(t)$ должно допускать решение обратного вопроса, т.е. выражение $t$ через $x$; пусть $t=\psi(x)$. Подставляя в уравнение (2) $\psi(x)$ вместо $t$, получим:

$$J=\Phi[\psi(x)]+C$$

и требуемый интеграл найден.

На практике очень часто трудно указать такую функцию $x=\varphi(t)$, которая упростила бы интегрирование; большею частью, как будет указано дальше, приходится брать новую переменную $t$ как некоторую функцию от $x$: это подстановка второго типа; относительно ее имеют силу те ограничения, как и относительно подстановки первого типа.

Поясним сказанное на примерах.

1) Пусть требуется найти интеграл:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Единственной из основных формул, к которой можно свести этот интеграл, является $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$. Возьмем подстановку первого типа: $x=at$, отсюда $dx=adt$; подставляя вместо $x$ и $dx$ равные им выражения в заданный интеграл, получаем:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}=\int\frac{a\,dt}{a\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C.$$

Из уравнения $x=at$ находим $t=\frac{x}{a}$; подставляя $\frac{x}{a}$ вместо $t$ в полученный результат находим окончательно

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Проверим полученный результат дифференцированием:

$$d\left(\arcsin\frac{x}{a}+C\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{dx}{a}=\frac{dx}{a\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Решим тот же пример преобразованием под'интегральной функции:

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}=\int\frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

2) $$J=\int\cos(ax+b)\,dx.$$

Пользуясь подстановкой второго типа, получаем:

$$ax+b=t;\qquad a\,dx=dt;\qquad dx=\frac{dt}{a},$$

следовательно:

$$J=\int\cos(ax+b)\,dx=\int\cos t\cdot\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a}\sin t+C;$$

так как $t=ax+b$, то $J=\int\cos(a+b)dx=\frac{1}{a}\sin t+C=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C.$

3) $$J=\int(ap+b)^n dp.$$

Очевидно, что единственною из основных формул, к которой можно свести заданный интеграл, будет $\int u^n du$. Подстановка второго типа дает:

$$ap+b=t;\quad dp=\frac{dt}{a};\quad J=\int(ap+b)^n dp=\int t^n\cdot\frac{dt}{a}=\frac{t^{n+1}}{a(n+1)}+C=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C.$$

Решим тот же пример преобразованием:

$$J=\int(ap+b)^n dx=\frac{1}{a}\int(ap+b)^n\cdot dax=\frac{1}{a}\int(ap+b)^n d(ax+b)=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C.$$

4) $$J=\int\frac{dx}{ax+b}.$$

Подстановка $ax+b=t$ дает: $dx=\frac{dt}{a}$;

$$J=\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln t+C=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C.$$

Можно поступить иначе:

$$J=\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dax}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C.$$

$b$ ) Указания. Разобранные примеры уяснили сущность метода замены переменной; чтобы научиться интегрировать, необходимо в легких случаях (см.прим. 2,3,4) производить все выкладки в уме и сразу писать ответ.

Общего указания, так сказать, общего рецепта - пригодного для каждого отдельного случая - как выбрать подстановку, дать нельзя: этому научаются длительным и тяжелым опытом. Здесь сделаем только несколько полезных замечаний.

I) Можно увеличить число основных формул на одну. Положим, что нам известен уже интеграл $\int f(u)du$, т.е.

$$\int f(u)du=\varphi(u)+C. \qquad (3).$$

Воспользуемся подстановкой первого типа: $u=ax+b$; $du=adx$; подставим найденные для $u$ и $du$ выражения в равенство (3), получаем:

$$\int f(ax+b)\cdot adx=\varphi(ax+b)+C,$$

отсюда:

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\varphi(ax+b)+C \qquad (4)$$

(относительно $\frac{C}{a}$ см.замеч. на стр.11 )

В частном случае при $b=0$ или $a=1$ имеем:

$$\int f(ax)dx=\frac{1}{a}\varphi(ax)+C; \quad \int f(x+b)dx=\varphi(x+b)+C.$$

Заметим, что здесь $u$ является линейной функцией $x$. На основании полученных равенств во все основные формулы можно прямо вместо $u$ поставить $x+b$; если же вместо $u$ подставляется $ax+b$ или $ax$, то впереди результата надлежит написать множитель $\frac{1}{a}$. Для решенных нами примеров 2), 3), 4) можно сразу написать ответ:

$$\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C;$$

$$\int(ap+b)^n dp=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ap+b)^{n+1}}{n+1}+C; \quad \int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln(ax+b)+C.$$

2) Если выражение под интегралом – дробь, числитель которой можно получить из знаменателя путем дифференцирования, то за новую переменную следует принять знаменателя и свести интегрирование к формуле $\int\frac{du}{u}$. Пример:

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{2ax^2+2bx+3c};$$

дифференцирование знаменателя дает:

$$d(2ax^2+2bx+3c)=2(2ax+b)dx,$$

откуда:

$$(2ax+b)dx=\frac{1}{2}d(2ax^2+2bx+3c).$$

Вводя новую переменную $2ax^2+2bx+3c=t$, получаем:

$$(2ax+b)dx=\frac{1}{2}dt;$$

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{2ax^2+2bx+3c}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(2ax^2+2bx+3c)+C.$$

Вообще, если заданный интеграл имеет вид:

$$J=\int F[f(x)].kf'(x)dx, \qquad (5)$$

где $F[f(x)]$ одна из функций основных формул интегрирования, взятая от сложного аргумента $f(x)$, а второй сомножитель $kf'(x)dx$ есть дифференциал сложного аргумента, в который введен множитель $k$, то за новую переменную следует взять этот сложный аргумент.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученное нами равенство (5) равносильно равенству (1) на стр. 28, но там была любая функция; здесь мы замечаем обратимость формул.

Возьмем пример:

$$J=\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{1-(3x^2-3x)^2}};$$

подстановка $3x^2-3x=t$ дает:

$$3(2x-1)dx=dt; \qquad (2x-1)dx=\frac{1}{3}dt;$$

следовательно:

$$J=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{3}\arcsin t+C=\frac{1}{3}\arcsin(3x^2-3x)+C.$$

3) К решению одного и того же примера иногда приходится подстановку применить два раза:

$$J=\int\frac{x\,dx}{(x^2-a)^2+b}$$

Первая подстановка:

$$x^2-a=t; \qquad 2x\,dx=dt;$$

$$x\,dx=\frac{1}{2}\,dt; \qquad J=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+b}.$$

Вторая подстановка:

$$t=z\sqrt{b}\ ; \qquad dt=\sqrt{b}\,dz\ ;$$

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{b}\,dz}{bz^2+b}=\frac{\sqrt{b}}{2b}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{b}}\,arctg\,z+C;$$

$$J=\frac{1}{2\sqrt{b}}\,arctg\,z+C=\frac{1}{2\sqrt{b}}\,arctg\frac{t}{\sqrt{b}}+C=\frac{1}{2\sqrt{b}}\,arctg\frac{x^2-a}{\sqrt{b}}+C.$$

П р и м е р ы.

1) $$J=\int\frac{(1-\sin x)\,dx}{\sqrt{x+\cos x}}.$$

Прежде чем сводить интегрирование к одной из основных формул, воспользуемся тем, что $(1-\sin x)\,dx=d(x+\cos x)$; полагая $x+\cos x=t$, находим: $(1-\sin x)\,dx=dt$, — и тогда:

$$J=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x+\cos x}+C.$$

2) $$J=\int e^{x^3}x^2\,dx.$$

Очевидно надлежит свести к формуле $\int e^u\,du+C$; простым преобразованием получаем:

$$J=\frac{1}{3}\int e^{x^3}3x^2\,dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}dx^3=\frac{1}{3}\,e^{x^3}+C;$$

тот же результат можно найти и так:

$$x^3=t; \qquad 3x^2\,dx=dt; \qquad x^2\,dx=\frac{1}{3}\,dt;$$

$$J=\frac{1}{3}\int e^t\,dt=\frac{1}{3}\,e^t+C=\frac{1}{3}\,e^{x^3}+C.$$

3) $J=\int\frac{y\,dy}{\sqrt{ay^2+b}}$; $ay^2+b=t$; $2ay\,dy=dt$; $y\,dy=\frac{dt}{2a}$;

$$J=\frac{1}{2a}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{a}\sqrt{t}+C=\frac{1}{a}\sqrt{ay^2+b}+C$$

4) $J=\int\frac{dt}{\sqrt{t+1}}$; $\sqrt{t+1}=u$; $t+1=u^2$; $dt=2u\,du$;

$$J=\int\frac{2u\,du}{u}=2\int du+C=2\sqrt{t+1}+C.$$

5) $J=\int\frac{\theta\,d\theta}{\sqrt{\theta^2+a}}$; $\sqrt{\theta^2+a}=t$; $\theta^2+a=t^2$; $2\theta\,d\theta=2t\,dt$; $\theta\,d\theta=t\,dt$;

$$J=\int\frac{t\,dt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{\theta^2+a}+C.$$

6) $J=\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$

Преобразуем сначала под'интегральную функцию:

$$J=\int\frac{dx}{x^2+2x+1+1}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+1};$$

отсюда имеем:

$$J=\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

7) $J=\int\frac{d\omega}{\sin^2\omega\cos^2\omega}$; $J=\int\frac{1\cdot d\omega}{\sin^2\omega\cos^2\omega}=\int\frac{\sin^2\omega+\cos^2\omega}{\sin^2\omega\cos^2\omega}d\omega$;

$$J=\int\left(\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\omega\cos^2\omega}+\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega\cos^2\omega}\right)d\omega=\int\left(\frac{1}{\cos^2\omega}+\frac{1}{\sin^2\omega}\right)d\omega;$$

$$J=\int\frac{d\omega}{\cos^2\omega}+\int\frac{d\omega}{\sin^2\omega}=\operatorname{tg}\omega-\operatorname{ctg}\omega+C.$$

8) $\mathcal{J}=\int\frac{dq}{q\ln q}$ Преобразованием получаем:

$$\mathcal{J}=\int\frac{\frac{dq}{q}}{\ln q}=\int\frac{d\ln q}{\ln q}=\ln\ln q+C.$$

Можно получить результат еще так:

$$\ln q=t;\ \frac{dq}{q}=dt;\quad \mathcal{J}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\ln q+C.$$

9) $\mathcal{J}=\int\frac{x^3+2x^2+7x+2}{x^2+1}\,dx$

Делим числителя на знаменателя, тогда:

$$\mathcal{J}=\int\left(5x+2+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=5\int x\,dx+2\int dx+\int\frac{2x\,dx}{x^2+1};$$

$$\mathcal{J}=\frac{5}{2}x^2+2x+\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1};\quad \mathcal{J}=\frac{5}{2}x^2+2x+\ln(x^2+1)+C.$$

10) $\mathcal{J}=\int\frac{x\,dx}{x+1}$. Разделим числителя на знаменателя:

$$\mathcal{J}=\int\frac{x+1-1}{x+1}\,dx=\int dx-\int\frac{dx}{x+1}=x-\int\frac{d(x+1)}{x+1}=x-\ln(x+1)+C.$$

## Упражнения для самостоятельной проработки.

При некоторых примерах указан прием решения, при других дана подстановка.

1) $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{(x^2-x-1)^3}}$; $x^2-x-1=t$. 2) $\int\frac{(2z+1)\,dz}{\sqrt{(2z+1)^2-3}}$; $\sqrt{(2z+1)^2-3}=t$.

3) $\int\frac{(2ap+b)\,dp}{\sqrt{(2ap+b)^2+c^2}}$, ответ: $\frac{1}{2a}\sqrt{(2ap+b)^2+c^2}+C$.

4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$; ответ: $\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha x^2+\beta}+C$.

5) $\int\frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$; ответ: $-\sqrt{a^2-x^2}+C$.

6) $\int\frac{\omega\,d\omega}{(m\omega^2+n)^{\frac{3}{2}}}$; $(m\omega^2+n)^{\frac{1}{2}}=t$; ответ: $\frac{-1}{m\sqrt{m\omega^2+n}}+C$.

7) $\int y\sqrt{ay^2+b}\,dy$; $\sqrt{ay^2+b}=t$.

8) $\int z(\alpha z^2+\beta)^{\frac{m}{2}}\,dz$; ответ: $\frac{(\alpha z^2+\beta)^{\frac{m+2}{2}}}{\alpha(m+2)}+C$.

9) $\int \frac{2dx}{3ax+b}$; преобразованием; Ответ: $\frac{2}{3a}\ln(3ax+b)+C$.

10) $\int \frac{3q^2+4}{2q^3+8q}dq$; преобразованием.

11) $\int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{a+b\cos\varphi}$; $a+b\cos\varphi=u$

12) $\int \frac{3db}{b\ln b^3}$; $\ln b^3=t$; ответ: $\ln\ln b^3+C$.

13) $\int \frac{\cos 2f\,df}{1-\sin 2f}$; преобразованием; ответ: $-\frac{1}{2}\ln(1-\sin 2f)+C$.

14) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$ преобразованием.

15) $\int \frac{t^2dt}{1+t^6}$; $t^3=u$; ответ: $\frac{1}{3}\,arctg\,t^3$.

16) $\int \frac{du}{3+7u^2}$; преобразованием; ответ: $\frac{1}{\sqrt{21}}\,arctg\,x\sqrt{\frac{7}{3}}+C$.

17) $\int \frac{y^{n-1}dy}{y^{2n}+1}$; ответ: $\frac{1}{n}\,arctg\,y^n+C$

18) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4b^4-x^6}}$; ответ: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{a^2b^2}+C$.

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x^2}}$; преобразованием; ответ: $\frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin x\sqrt{\frac{8}{5}}+C$.

20) $\int \frac{e^{a\varphi}d}{\sqrt{1-e^{2a\varphi}}}$; преобразованием; ответ: $\frac{1}{a}\arcsin e^{a\varphi}+C$.

21) $\int \frac{e^x+1}{e^x}dx$; сначала разделить числителя на знаменателя; ответ: $x-e^{-x}+C$.

22) $\int e^{-2z}dz$; преобразованием; ответ: $-\frac{1}{2}e^{-2z}+C$.

23) $\int \frac{a^{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$; $\sqrt{x}=t$; ответ: $\frac{a^{2\sqrt{x}}}{2\ln a}+C$.

24) $\int \sin(3x+2)dx$; преобразованием.

25) $\int [\cos(x^3+1)]x^2dx$; преобразованием.

26) $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)}$; преобразованием.

27) $\int \frac{ydy}{\cos^2(my^2+n)}$; преобразованием.

28) $\int \frac{\sin 2t\,dt}{\sin^2 t+3}$; сначала преобразовать $\sin 2t$; затем подстановка $\sin t=u$. Ответ: $\ln(\sin^2 t+3)+C$.

## 2. Метод интегрирования по частям.

а) Сущность метода. Пусть $uv$ произведение двух функций. По правилу дифференцирования имеем:

$$d(uv)=udv+vdu;$$

отсюда:

$$udv=d(uv)-vdu.$$

После интегрирования получаем:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

($C$ включается в знак интеграла).

Полученная формула называется формулой интегрирования по частям и часто дает возможность разыскание одного интеграла свести к разысканию другого более простого интеграла. Под'интегральное выражение должно быть представлено в виде произведения одной функции на дифференциал другой, в простейшем случае второю функцией может быть переменная интегрирования; иногда под'интегральное выражение может быть с выгодой представлено различным образом в виде искомого произведения, таким образом формула интегрирования по частям иногда дает широкую возможность преобразования интеграла.

Правило пользования формулой следующее.

**Искомый интеграл заменяется разностью двух членов, причем первый член получается из интеграла, опуская знаки интегрирования и дифференцирования,- второй же получается из того же интеграла перестановкою функций.**

Обратимся к примеру. Требуется найти: $J=\int(2x+1)\ln x\,dx$; перепишем этот интеграл таким образом:

$$J=\int(\ln x)\cdot\left[(2x+1)\,dx\right]$$

Возьмем второй множитель и проинтегрируем его:

$$\int(2x+1)\,dx=\int 2x\,dx+\int dx=x^2+x+C,$$

следовательно:

$$(2x+1)\,dx=d(x^2+x+C).$$

Искомый интеграл преобразуется в такой:

$$J=\int(\ln x)\cdot d(x^2+x+C);$$

отсюда по формуле интегрирования по частям находим:

$$J=\int(\ln x)\,d(x^2+x+C)=(x^2+x+C)\ln-\int(x^2+x+C)\,d\ln x. \qquad (5)$$

Так как $d\ln x=\frac{dx}{x}$, то мы $\ln x$ заменили более простой функцией $\frac{1}{c}$ и второй интеграл найдется легко:

$$\int(x^2+x+c)\,d\ln x=\int(x^2+x+c)\frac{dx}{x}=\int x\,dx+\int dx+c\int\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}+x+c\ln x+C_1.$$

Подставляя полученное выражение в рав. (I), имеем:

$$J=(x^2+x+C)\ln x-\left(\frac{x^2}{2}+x+C\ln x+C_1\right);$$

$$J=x^2\ln x+x\ln x+C\ln x-\frac{x^2}{2}-x-C\ln x-C_1;$$

$$J=x^2\ln x+x\ln x-\frac{x^2}{2}-x-C_1.$$

Записав вместо $-C_1$ просто $C$ получаем окончательно:

$$J=(x^2+x)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C.$$

Проверьте полученный результат дифференцированием.

При решении предыдущего примера приходилось два раза интегрировать, т.е. мы как бы разбили операцию интегрирования на две части, откуда и название: интегрирование по частям. При первом интегрировании вместо $2x+1$ получилась более сложная функция $x^2+x$, но зато дифференцирование вместо функции $\ln x$ дало более простую $\frac{1}{x}$: выигрыш, так сказать, значительно превысил проигрыш; если этого нет, т.е. если первое интегрирование вводит сложную функцию, а дифференцирование особых выгод не приносит, то применение формулы интегрирования по частям бесполезно. Обыкновенно первое интегрирование настолько простое, что производится в уме. Как показывает решенный пример, постоянную второго интегрирования следует приписать в конце результата, что и надлежало ожидать на основании второго основного свойства; <u>постоянную первого интегрирования брать не следует,</u> так как она уничтожается. Последний факт докажем; предположим, что при первом интегрировании получили $\int dv=v+C$; подставляя полученный результат в формулу интегрирования по частям, имеем:

$$\int u\,dv=u(v+c)-\int(v+c)\,du;$$

$$\int u\,dv = uv + Cu - \int v\,du - C\int du;$$
$$\int u\,dv = uv + Cu - \int v\,du - C(u + C_1)$$
$$\int u\,dv = uv + Cu - \int v\,du - Cu - CC_1;$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C$$

(см.зам. на стр. II ); включая $C$ в интеграл, получаем окончательно:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

b) Примеры.

1) $$\int x^n \ln x\,dx = \int \ln x\, d\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\,d\ln x;$$

$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{dx}{x};$$

$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

2) $J = \int \ln x\,dx$. Здесь роль второй функции играет переменная независимая

$$J = \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

3) $$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\,d\operatorname{arctg} x;$$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\frac{dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

4) $$\int xe^x dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

5) Иногда формулу интегрирования по частям при решении одного и того же интеграла приходится применять несколько раз:

$$J = \int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2;$$
$$J = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$$

Так как последний интеграл мы уже имели в предыдущем примере, то подставим готовый результат:

$$J=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

Всматриваясь в этот пример, замечаем, что после первого интегрирования получился интеграл такого же типа, как и первый, только степень $x$ на единицу меньше; в дальнейшем курсе мы встретимся с так называемыми формулами приведения.

В заключение заметим, что интегрирование по частям иногда приводит не к непосредственному отысканию интеграла, а к уравнению, из которого он получается.

Примеры для упражнения.

1) $\int x\cos 2x\,dx$; ответ: $\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$.

2) $\int \arcsin u\,du$; ответ: $u\arcsin u+\sqrt{1-u^2}+C$.

3) $\int z^2\cos z\,dz$; ответ: $z^2\sin z+2z\cos z-2\sin z+C$.

4) $\int 2x(x^2+1)\cos(x^2+1)\,dx$; положить $x^2+1=t$; затем интегрирование по частям; ответ: $(x^2+1)\sin(x^2+1)+\cos(x^2+1)+C$.

5) $\int \frac{x\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ответ: $x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x+C$.

6) $\int (\ln x)^2dx$; ответ: $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$.

7) $\int 2e^{x^2}x^3dx$; ответ: $x^2e^{x^2}-e^{x^2}+C$.

Положить сначала $x^2=t$.

При нахождении интеграла $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ ( см. стр. 40 пример 3) пришлось применить сначала метод интегрирования по частям, потом метод подстановки, хотя последнюю мы проделали в уме; здесь имели место оба метода. Возьмем еще пример:

$$J=\int e^{x^2-3x}(x^2-3x)^2\cdot(2x-3)\,dx;$$

здесь выгодно применить сначала подстановку:

$$e^2-3x=t; \qquad (2x-3)\,dx=dt,$$

тогда

$$J=\int e^t \cdot t^2\,dt;$$

этот интеграл уже найден интегрированием по частям (см. пример 5, стр. 40 ), поэтому сразу напишем:

$$\int e^{x^2-3x}(x^2-3x)^2(2x-3)\,dx=e^{x^2-3x}\left[(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)+2\right]+C.$$

Интегрирование некоторых функций настолько затруднительно, что кроме знания методов интегрирования, необходимо еще особое рассмотрение этих интегралов. Возьмем сравнительно легкие примеры:

$$J=\int\frac{dx}{\sin x};$$

преобразование дает:

$$J=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}};$$

деля числителя и знаменателя на $\cos^2\frac{x}{2}$, получаем:

$$J=\int\frac{\dfrac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{tg\frac{x}{2}};$$

вводим подстановку:

$$tg\frac{x}{2}=z; \qquad \frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=dz;$$

отсюда имеем:

$$J=\int\frac{dz}{z}=\ln z+C;$$

итак окончательно находим:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln tg\frac{x}{2}+C.$$

К этому интегралу сведем интеграл:

$$\int\frac{dx}{\cos x};$$

после преобразования получим:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

и на основании предыдущей формулы:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$$

Полученные результаты отметим, так как они пригодятся нам при решении практических задач. Напомним еще раз, что при применении различных приемов интегрирования могут получиться различные по виду результаты, так

$$\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx=\frac{a}{2}\arcsin\frac{2x-a}{a}+\sqrt{ax-x^2}+C$$

и

$$\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}=a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{ax-x^2}+C;$$

проверьте, что дифференциал разности результатов равен нулю (см. второе основное свойстве интегралов, стр. 10 ).

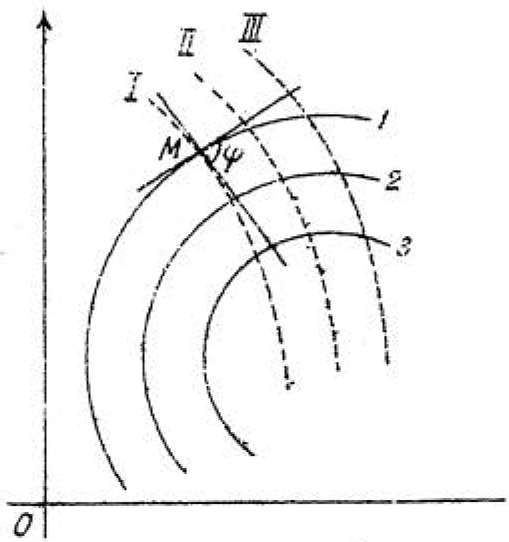
Прежде чем приступить к рассмотрению некоторых типов интегралов, решим несколько практических задач, пользуясь тем, что расширили наш аппарат интегрирования.

## c) Практические задачи.

( для желающих, в порядке соцсоревнования).

Задача I. Изогональные траектории. Дано семейство кривых $y=f(x;a)$, где $a$ есть переменный параметр; найти изогональные траектории, т.е. семейство таких кривых, которые данные кривые пересекали бы под одним и тем же заданным углом.

Данные кривые обозначим числами: 1,2,3 и т.д. (черт.59), - искомые траектории пусть будут: I,II,III... Заданный угол пересечения $\varphi$; под углом пересечения двух кривых подразумевается угол между двумя касательными, проведенными к кривым в точке пересечения.




Черт. 59.

Пусть касательная к кривой 1-й в точке $M$, т.е. в одной из точек пересечений, образует с осью абсцисс угол $\alpha$, касательная же к кривой $I$ угол $\alpha_1$, тогда, как известно из анал. геометрии, имеем:

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha_1 . tg\alpha} \qquad (1).$$

Но тангенс угла, образованного касательной с осью абсцисс, равен производной функции; обозначим производную искомой функции через $y'$; для производной заданной функции имеем $f'(x;a)$, где производная взята только по аргументу $x$, так как $a$ произвольное постоянное число.

Уравнение (I) получает вид:

$$\frac{y' - f'(x;a)}{1 + f'(x;a) \cdot y'} = tg\varphi \qquad (2)$$

переходя к дифференциальной форме, находим:

$$\frac{dy - f'(x;a)\,dx}{dx + f'(x;a)\,dy} = tg\varphi \qquad (3)$$

или:

$$dy-f'(x;a)\,dx=\left[dx+f'(x;a)\,dy\right].tg\varphi. \qquad (4)$$

Чтобы получить уравнение прямоугольных траекторий (тогда $tg\varphi$ будет бесконечностью), надо знаменатель равенства (3) приравнять нулю:

$$dx+f'(x;a)\,dy=0. \qquad (5)$$

В полученные уравнения (4) и (5) входит произвольный параметр $a$, который при решении задач, как будет показано дальше, надлежит исключить, пользуясь заданным уравнением семейства кривых.

Возьмем примеры.

I) Найти прямоугольные траектории семейства прямых $y=ax$, где $a$ произвольный параметр.

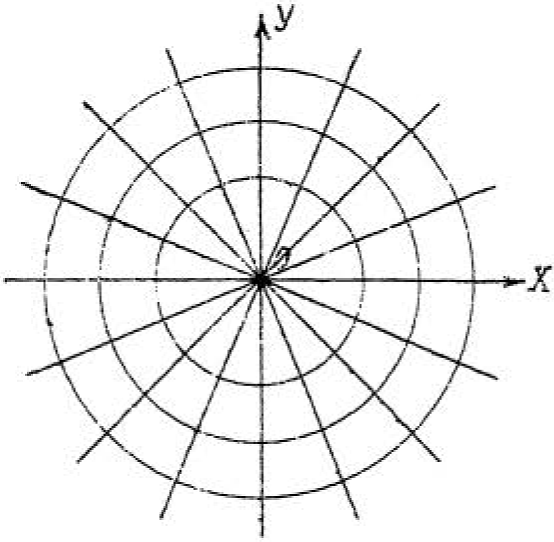
Искомые траектории, конечно, будут окружности; посмотрим. Функцией $f(x;a)$ в данной задаче будет $ax$, тогда $f'(x;a)=a$ и урав. (5) перепишется так: $dx+a\,dy=0$; остается найти $a$ из данного уравнения $y=ax$ и подставить: $y=ax$; $a=\frac{y}{x}$; итак окончательно найдем:

$dx+\frac{y}{x}\,dy=0$; или $x\,dx+y\,dy=0.$

Интегрирование дает: $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=C$, откуда: $x^2+y^2=2C$; так как левая часть равенства положительная (сумма квадратов), то чтобы поставить на вид, что и правая часть должна быть положительной, напишем $C^2$ вместо $2C$, тогда:

$$x^2+y^2=C^2.$$

Получилось семейство окружностей с центром в начале координат и с произвольным радиусом $C$ (черт. 60).




Черт. 60.

Прямоугольные траектории встречаются, между прочим, при рассмотрении плоского течения жидкости.

2) Возьмем предыдущий пример, но при условии, чтобы траектории пересекали семейство прямых $y=ax$ под любым углом $\varphi$.

Попрежнему найдем: $f'(x;a)=a$; так как из уравнения $y=ax$ получаем: $a=\frac{y}{x}$, то $f'(x;a)=\frac{y}{x}$. Подставим полученное для $f'(x;a)$ выражение в урав. (4):

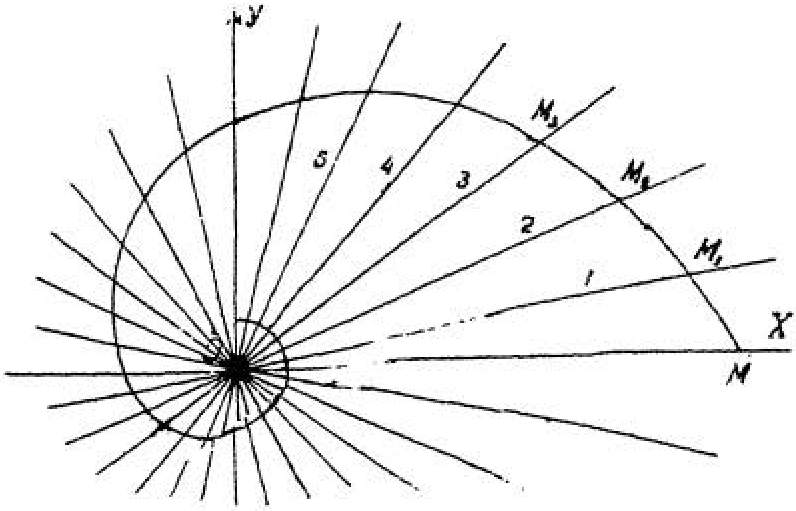
$$dy-\frac{y}{x}dx=\left[dx+\frac{y}{x}dy\right]tg\varphi,$$

или:

$$xdy-ydx=\left[xdx+ydy\right]tg\varphi. \qquad (6).$$

Предстоит трудная задача отделения переменных; призовем на помощь опыт.

Исходя из уравнения $y=ax$, проведем через начало координат несколько произвольно взятых прямых: 1,2,3, 4,5 и т.д. (черт. 61). Из какой-нибудь точки $M$ на оси абсцисс проведем под произвольным углом к оси абсцисс прямую $MM_1$ до встречи в точке $M_1$ с прямою $1$ — из точки $M_1$ под тем же углом к прямой $1$ проведем прямую $M_1M_2$ до встречи в точке $M_2$ с прямой 2 и т.д. У нас получится как бы спираль, составленная из отрезков прямых ( по виду даже мало отличающаяся




Черт. 61.

от кривой). При безграничном же увеличении числа прямых, проходящих через начало координат, ломаная линия обратится в настоящую спираль; уравнения же спиралей удобно выражать в полярных координатах; перейдем к полярным координатам: $x=r\cos\psi$; $y=r\sin\psi$. Прежде чем сделать подстановку, для упрощения выкладок преобразуем урав.(6):

$$xdy-ydx=x^2\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=x^2d\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$xdx+ydy=\frac{2xdx+2ydy}{2}=\frac{dx^2+dy^2}{2}=\frac{1}{2}d(x^2+y^2);$$

следовательно, урав.(6) перепишется так:

$$x^2d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}tg\varphi\, d(x^2+y^2),$$

или обозначая $tg\varphi$, как величину постоянную через $\kappa$:

$$x^2d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{}{2}\kappa d\left(x^2+y^2\right). \qquad (7).$$

Воспользуемся теперь полярными координатами:

$$x^2=r^2\cos^2\psi;\ \frac{y}{x}=\frac{r\sin\psi}{r\cos\psi}=tg\psi;\quad d\left(\frac{y}{x}\right)=d\,tg\,\psi=\frac{d\psi}{\cos^2\psi};$$

урав.(7) примет вид:

$$r^2\cos^2\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\cos^2\psi}=\frac{1}{2}k\cdot 2r\partial r,$$

или

$$r\partial\psi=k\partial r$$

(диффер. уравнение в поляр. коорд.).

Теперь переменные отделяются легко:

$$\frac{\partial r}{r}=\frac{\partial\psi}{k};\quad \int\frac{\partial r}{r}=\frac{1}{k}\int\partial\psi;\quad \ln r=\frac{1}{k}\psi+\ln C;\quad \ln\frac{r}{C}=\frac{1}{k}\psi;$$

потенцирование дает: $\frac{r}{C}=l^{\frac{\psi}{k}}$ и окончательно:

$$r=Cl^{\frac{\psi}{k}}. \qquad (8)$$

Получилось семейство логарифмических спиралей. Так как $k=tg\varphi$, то при $\varphi=90^0$ имеем: $\frac{\psi}{k}=0$ и урав.(8) примет вид $r=C$, т.е. получается уравнение в полярных координатах семейства концентрических окружностей, что мы уже имели в примере (I).

Решенный пример показывает, какое значение имеет удачный выбор системы координат.

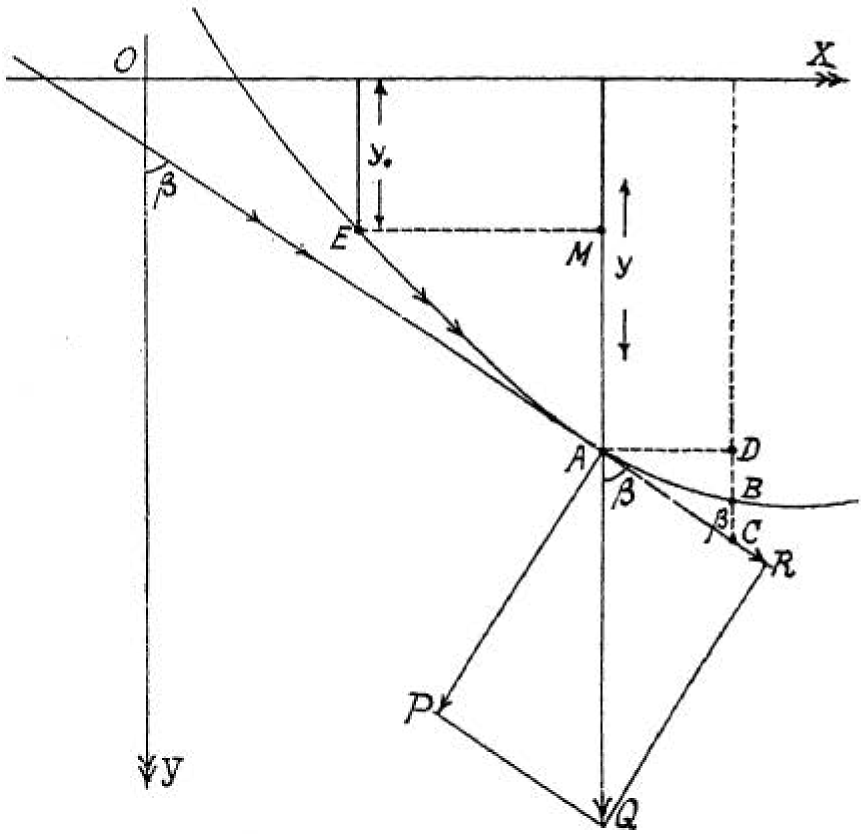
Задача 2. Падение тяжелой точки по плоской кривой и циклоидальный маятник. Здесь надлежит решить две задачи, из которых решение второй основывается на формуле, выведенной в первой задаче. Начнем с первой.

I) Материальная точка без начальной скорости под действием силы притяжения земли падает по заданной плоской кривой. Найти скорость материальной точки в любой точке кривой.

Пусть материальная точка скатывается из точки $E$ в плоскости чертежа по кривой $EAB$ (черт.62), заданной параметрически (см. задачу № I, стр. 18 ):

$$x=f_1(t) \quad \text{и} \quad y=f_2(t).$$

Для наглядности можно представить себе шарик, скатывающийся по желобу, имеющему форму кривой, причем трение и сопротивление воздуха в расчет не принимаются.




Черт. 62.

Ось абсцисс - горизонтальная линия, ось ординат - вертикальная, направленная вниз, как и сила притяжения земли.

Пусть в момент $t$ материальная точка находится в точке $A$ кривой.

Так как начальная скорость равна нулю, то материальная точка находится под действием только силы тяжести, которая геометрически дана вектором $\vec{AQ}$ направленным вниз. Разложим силу притяжения на две силы: силу $\vec{AR}$, направленную по касательной в сторону движения тела (направление касательной в сторону положительных ординат), и силу $\vec{AP}$, направленную вниз по нормали к точке $A$.

Последняя сила уничтожается сопротивлением преграды, остается только сила $\vec{AR}$. Если принять за единицу длины I см (за единицу времени I сек.), то, как известно из физики, сила, выраженная в динах, равна произведению массы на ускорение. Считая $g$, т.е. ускорение силы притяжения земли, постоянным, для силы $AQ$ имеем: $mg$, где $m$ масса материальной точки; обозначая ускорение пока неизвестной силы $AR$ через $w$ для этой силы получим выражение: $mw$.

Из треугольника $AQR$ находим: $AR=AQ\cos\beta$, – или, подставляя вместо $AR$ и $AQ$ полученные для них выражения:

$$mw=mg\cos\beta; \quad \text{откуда:} \quad w=g\cos\beta. \qquad (1)$$

Значение $g$ известно и для определения $w$ остается найти $\cos\beta$. Чертеж показывает, что $\beta$ есть угол между касательной и положительным направлением оси ординат. Из дифференциального исчисления известно, что

$$\cos\beta=\frac{dy}{ds}.$$

Действительно: если возьмем на кривой точку $B$ бесконечно-близкую к точке $A$ и продолжим ординату точки $B$ до пересечения с касательной в точке $C$, то из треугольника $ACD$ имеем:

$$CD=AC\cos\widehat{ACD},$$

или:

$$CD=AC\cos\beta; \qquad \cos\beta=\frac{CD}{AC} \qquad (2)$$

в виду того, что точка $B$ бесконечно близкая к точке $A$, вместо $AC$ можно взять дугу $AB$, которую обозначим через $\Delta s$ (длина дуги $EA$ есть $s$, $AB$ - приращение дуги $EA$ ); на том же основании вместо $CD$ возьмем $BD$ т.е. $\Delta y$, так как $BD$ приращение ординаты точки $A$; вместо урав.(2) получим приближенное равенство: $\cos\beta \approx \frac{\Delta y}{\Delta s}$, или в пределе: $\cos\beta = \frac{dy}{ds}$

Подставляя выражение для $\cos\beta$ в урав.(1), находим:

$$w = g \cdot \frac{dy}{dS} \qquad (3)$$

Формула $w = \frac{dv}{dt}$ нам уже известна (см.задачу I, стр. 18); поэтому вместо урав.(3) напишем:

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{dy}{dS};$$

отсюда:

$$dv = g\,dy \cdot \frac{dt}{dS}. \qquad (4)$$

Так как $\frac{ds}{dt} = v$, то $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}$ и равенство (4) перепишется так:

$$dv = g\,dy \cdot \frac{1}{v};$$

отделяем переменные: $v\,dv = g\,dy$; интегрирование дает: $\int v\,dv = g\int dy$;

$$\frac{1}{2}v^2 = gy + C. \qquad (5)$$

Определим постоянную интегрирования. Скорость в точке $E$, где материальная точка находилась в момент $t=0$, равна нулю; ордината точки $E$ дана: $y_0$,— тогда из урав.(5) найдем:

$$0 = gy + C; \qquad C = -gy_0.$$

Подставляя полученное для $C$ выражение в урав(5), имеем:

$$\frac{1}{2}v^2 = gy - gy_0,$$

или:

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}. \qquad (6)$$

Чертеж показывает, что разность $y-y_0$ равна $MA$, т.е. материальная точка, двигаясь от точки $E$ до точки $A$ спустилась вниз на $MA$. Обозначая $MA$, т.е. $y-y_0$, через $h$, находим на основании урав.(6):

$$v=\sqrt{2gh}. \qquad (7)$$

Так как функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ совершенно произвольны, то урав.(7) имеет место при падении материальной точки по всякой кривой (ограничимся только кривыми во всех своих точках обращенными вогнутостью вверх).

Рассмотрим случай свободно падающего тела:

$$v=gt \quad \text{и} \quad s=\frac{1}{2}gt^2,$$

или:

$$v^2=g^2t^2 \quad \text{и} \quad s=\frac{1}{2}gt^2;$$

определяя из второго уравнения $t^2$ и подставляя в первое, найдем:

$$t^2=\frac{2s}{g}; \quad v^2=2gs; \quad v=\sqrt{2gs};$$

так как в этом случае тело падает по вертикальной линии, то, подставляя $h$ вместо $s$ имеем: $v=\sqrt{2gh}$; получается снова уравнение (7).

2) Период колебания обыкновенного маятника, строго говоря, зависит от угла отклонения от отвесной линии и даваемая в курсах физики приближенная формула:

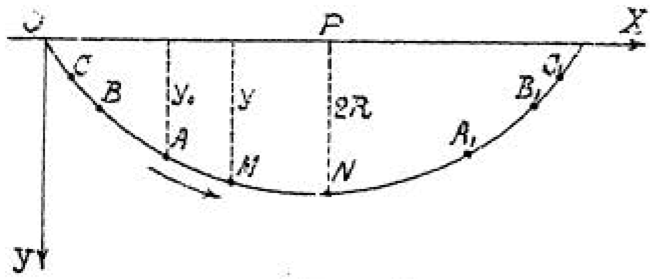
$$t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где $t$ период колебания, $l$ длина маятника, $g$ - ускорение земного притяжения, применима только при небольших углах отклонения. Это обстоятельство заставило Гюйгенса заняться вопросом о циклоидальном маятнике, который есть один из случаев падения материальной точки по кривой.

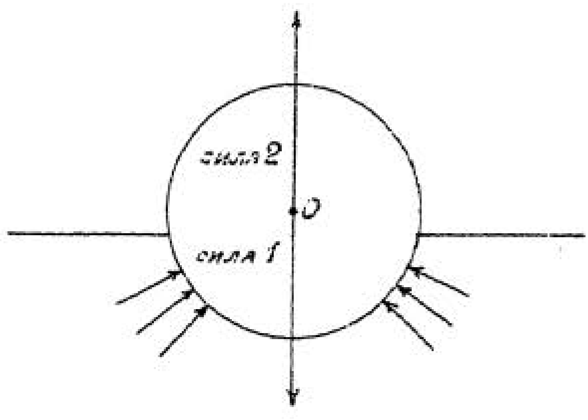
Чтобы возможно было колебательное движение материальной точки по циклоиде, необходимо обратить циклоиду вогнутостью вверх.

Поставим теперь задачу: найти время, которое понадобится, чтобы падающая по циклоиде материальная точка из начальной точки $A$, (черт.63) спустилась бы в низшую точку циклоиды $N$, если скорость в точке $A$, т.е. в момент $t_0=0$ равна нулю: $v_0=0$.

Для наглядности можно представить шарик, скатывающийся по желобку в форме циклоиды (трение и сопротивление воздуха во внимание не принимаются).




Черт. 63.




Черт. 64.

Так как циклоида обращена вогнутостью вверх, то возникает вопрос: пригодятся ли раньше выведенные параметрические уравнения циклоиды. Представим себе чертеж, которым пользовались при выводе уравнений циклоиды, образованной движением точки окружности круга, катящегося без скольжения по оси абсцисс, причем круг остается сверху этой оси. Если повернуть чертеж, считая его прозрачным около оси $OX$, то получим обращенную вогнутостью вверх циклоиду ниже оси абсцисс и ось $OY$ будет теперь направлена вниз (образующий круг катится по оси абсцисс, оставаясь ниже ее). Раньше полученные уравнения циклоиды: $x=R(\varphi-\sin\varphi$ и $y=R(1-\cos\varphi)$ будут применимы и в данном случае (вопрос же о направлении отсчета угла $\varphi$ для данной задачи, как увидим ниже, не имеет значения).

На основании урав(6) (см. предыдущую задачу) найдем скорость в точке $M$, промежуточной между точками $A$ и $N$; координаты точки $A$ обозначим через $x_0$ и $y_0$. Уравнения циклоиды дают:

$$y=R(1-\cos\varphi);\quad y_0=R(1-\cos\varphi_0);\quad y-y_0=R(\cos\varphi_0-\cos\varphi).$$

Уравнение (6) примет вид:

$$v=\sqrt{2Rg(\cos\varphi_0-\cos\varphi)},$$

или:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2Rg(\cos\varphi_0-\cos\varphi)};$$

откуда:

$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{2Rg(\cos\varphi_0-\cos\varphi)}}$$

Найдем $ds$:

$$dx=R(1-\cos\varphi)d\varphi;\quad dy=R\sin\varphi\, d\varphi;$$

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{R^2(1-\cos\varphi)^2d\varphi^2+R^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2};$$

после легких преобразований:

$$ds=R\sqrt{2(1-\cos\varphi)}d\varphi=R\sqrt{2.2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi;$$

$$ds=2R\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi.$$

Подставляя найденное для $ds$ выражение, имеем:

$$t=\sqrt{\frac{2R}{g}}\int\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi_0-\cos\varphi}}=-2\sqrt{\frac{2R}{g}}\int\frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos\varphi_0-\cos\varphi}}\,.$$

Обратим внимание на то, что в числитель под'интегрального выражения входит угол $\frac{\varphi}{2}$, в знаменатель угол $\varphi$; поэтому сделаем следующие преобразования:

$$\cos\varphi_0=\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}=2\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-1;$$

$$\cos\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1;$$

$$\cos\varphi_0-\cos\varphi=2\left(\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Искомый интеграл перепишется так:

$$t=-2\sqrt{\frac{R}{g}}\int\frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\cos^2\frac{\varphi}{2}}}$$

Теперь ясно, что интегрирование следует свести к основной формуле:

$$-\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arccos u+C;$$

делаем подстановку $\cos\frac{\varphi}{2}=\check{t}$, тогда:

$$t=-2\sqrt{\frac{R}{g}}\int\frac{d\check{t}}{\sqrt{\cos^2\frac{\varphi_0}{2}-\check{t}}}=-2\sqrt{\frac{R}{g}}\int\frac{d\frac{\check{t}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\check{t}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right)^2}};$$ откуда:

$$t=2\sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}+C. \qquad (8).$$

Определим постоянную интегрирования.

Для точки $A$ имеем: $t=0$ и $v=v_0$, следовательно на основании урав.(8):

$$0=2\sqrt{\frac{R}{g}}\arccos 1+C;\quad 0=2\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot 0+C;\quad C=0,$$ и урав. 8

примет вид:

$$t=2\sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}} \qquad (9)$$

Для точки $N$ (черт. 63) $\varphi=\pi$; поэтому

$$t=2\sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}};\ t=2\sqrt{\frac{R}{g}}\arccos 0;\ t=2\sqrt{\frac{R}{g}}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$t=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \qquad (10)$$

Поставленная задача решена. Сделаем выводы: тот же ответ мы получили бы, если бы материальная точка начала падать из какой-нибудь другой точки циклоиды; если несколько материальных точек начнут одновременно падать из точек $O, B, A$ и $M$ циклоиды, то они одновременно достигнут и точки $N$.

Вернемся к нашей прежней материальной точке; начав падать из точки $A$ и достигнув точки $N$, она по инерции будет продолжать двигаться дальше, совершая под'ем, причем убывание скорости на основании урав.(7) (см. стр. 52 ) будет итти в обратном порядке ее прежнему нарастанию; на основании того же урав.(7) материальная точка, достигнув точки $A_1$ (дуга $A_1N$ равна дуге $AN$ начнет снова падать; период колебания, т.е.время необходимое для того, чтобы материальная точка,начав падать из точки $A$, вернулась бы снова в эту же точку, будет:

$$T=4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (11)$$

Этот период не зависит от угла отклонения, который в урав.(11) не входит, и один и тот же из какой бы точки циклоиды материальная точка не начала бы падать. На практике вследствие большого трения установленный закон нарушается; говорить о разных практических приспособлениях для уменьшения трения не будем. Если на продолженной вверх хорде $NP$ отложить от точки $N$ отрезок, равный $4R$, и из полученной точки описать окружность радиусом $4R$, то эта окружность вблизи точки $N$ практически совпадает с циклоидой (если сможете, то найдите радиус кривизны циклоиды).

Таким образом при малых углах отклонения практически урав.(II) можно применить и к обыкновенному маятнику; это уравнение перепишем так:

$$T=4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=2\pi\cdot 2\sqrt{\frac{R}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}};$$

так как $4R$ радиус окружности, которую берем вместо циклоиды, т.е. длина обыкновенного маятника, обозначаемая через $l$, то для периода колебания обыкновенного маятника имеем:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Добавление (для желающих).

Для обыкновенного маятника имеем случай падения материальной точки по окружности. Считаем ось ординат направленной вниз; параметрические уравнения окружности: $x=l\sin\varphi$, $y=l\cos\varphi$, где $l$ - радиус, отсчет же угла $\varphi$ ведется от оси ординат. Исходя из урав.(6) (стр.51), имеем:

$$v=\sqrt{2gl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)},$$

или

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)};$$

отсюда

$$t=\int\frac{ds}{\sqrt{2gl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}}.$$

Так как для окружности $ds = l\,d\varphi$, то получим:

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}.$$

Этот простой повидимому интеграл нельзя выразить при помощи известных нам элементарных функций; он приводится к так называемым эллиптическим интегралам.

## § 26. НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ИНТЕГРАЛОВ.

Кроме знания общих методов интегрирования необходимо еще (как было уже замечено на стр. 42 )особое рассмотрение некоторых типов интегралов. Пример практической задачи(на стр. 55) указывает на трудности, с которыми приходится иметь дело при интегрировании функций. Ограничимся только типами интегралов, необходимых на первое время при решении практических задач; более легкие случаи были уже рассмотрены,остается только привести их в систему.

### I. Интегрирование алгебраических функций.

а) Укажем сначала два типа интегралов, с которыми уже встречались.

$$\int(ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int(ax+b)^n d(ax) = \frac{1}{a}\int(ax+b)^n d(ax+b) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C;$$

$$\int(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C; \qquad (1)$$

$$\int(ax^m+b)^n x^{m-1} dx = \frac{1}{am}\int(ax^m+b)^n d(ax^m+b) = \frac{(ax^m+b)^{n+1}}{am(n+1)} + C;$$

$$\int(ax^m+b)^n x^{m-1} dx = \frac{(ax^m+b)^{n+1}}{am(n+1)} + C. \qquad (2)$$

Обе формулы применимы при всяком $n$ за исключением $n=-1$.

## b) Интегрирование рациональных дробей.

В дальнейшем будет дан более подробный курс интегрирования рациональных дробей, здесь же мы ограничимся простейшими типами интегралов.

1) Рассмотрим сначала случаи неприменимости выведенных выше двух формул (эти случаи нам уже встречались).

$$\int (ax+b)^n dx \qquad \text{при} \qquad n=-1:$$

$$\int (ax+b)^{-1} dx = \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax)}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)+C;$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)+C. \qquad (3)$$

$$\int (ax^m+b)^n x^{m-1} dx \qquad \text{при} \qquad n=-1:$$

$$\int (ax^m+b)^{-1} x^{m-1} dx = \int \frac{x^{m-1}dx}{(ax^m+b)} = \frac{1}{am}\int \frac{d(ax^m+b)}{ax^m+b} = \frac{1}{am}\ln(ax^m+b)+C;$$

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{ax^m+b} = \frac{1}{am}\ln(ax^m+b)+C. \qquad (4)$$

2) $\int \frac{dx}{b+x^2}$, где $b$ число положительное; так как всякое положительное число можно представить как квадрат другого числа, то искомый интеграл перепишем в виде:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C. \qquad (5)$$

Возьмем пример на применение формулы:

$$\int\frac{dx}{3+x^2}=\int\frac{dx}{(\sqrt{3})^2+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$$

Пользуясь выведенной формулой, найдем:

$$\int\frac{dx}{b+x^2}=\frac{1}{\sqrt{b}}\,arctg\frac{x}{\sqrt{b}}+c \quad \text{при} \quad b>0 \qquad (6).$$

Интеграл $\int\frac{dx}{b^2+a^2x^2}$ сведем к формуле (5):

$$\int\frac{dx}{b^2+a^2x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{b}\,arctg\frac{ax}{b}+c;$$

$$\int\frac{dx}{b^2+a^2x^2}=\frac{1}{ab}\,arctg\frac{a}{b}x+c.$$

Пользуясь полученной формулой, имеем:

$$\int\frac{dx}{b+ax^2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\,arctg\,x\sqrt{\frac{a}{b}}+c \quad \text{при} \quad b>0 \text{ и } a>0. \;(7)$$

Пример на применение формулы:

$$\int\frac{5dx}{3+2x^2}=\frac{5}{\sqrt{6}}\,arctg\,x\sqrt{\frac{2}{3}}+c.$$

е) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$.

Не зная разложения рациональных дробей на простейшие, применим искусственный прием преобразования подынтегральной функции:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{2a}{2a(x+a)(x-a)}=\frac{a+a}{2a(x+a)(x-a)};$$

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{a+x+a-x}{2a(x+a)(x-a)}=\frac{a+x}{2a(x+a)(x-a)}-\frac{x-a}{2a(x+a)(x-a)};$$

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}.$$

Искомый интеграл преобразуется в следующий:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a};$$

пользуясь формулой (2), найдем:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln(x-a)-\frac{1}{2a}\ln(x+a)+C;$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C. \qquad (8)$$

Пример. $\int\frac{dx}{x^2-3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+C.$

Применим полученную формулу к нахождению интеграла

$$\int\frac{dx}{mx^2-n},$$

где $m>0$ и $n>0$:

$$\int\frac{dx}{mx^2-n}=\frac{1}{m}\int\frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\right)^2}=\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{m}{n}}\ln\frac{x-\sqrt{\frac{n}{m}}}{x+\sqrt{\frac{n}{m}}}+C;$$

$$\int\frac{dx}{mx^2-n}=\frac{1}{2\sqrt{mn}}\ln\frac{x\sqrt{m}-\sqrt{n}}{x\sqrt{m}+\sqrt{n}}+C. \qquad (9).$$

Пример:

$$\int\frac{dx}{5x^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\frac{x\sqrt{5}-\sqrt{2}}{x\sqrt{5}+\sqrt{2}}+C.$$

**4)** Интеграл $\int\frac{dx}{a^2-x^2}$ легко найдем, применяя те же преобразования, как и при вычислении предыдущего интеграла:

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C. \qquad (10).$$

Пример: $\int\frac{dx}{5-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}+C.$

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулах (8) и (10) считаем, что $a>0$. Не принимая во внимание случай, когда $x=\pm a$, эти формулы применимы при всяком $x$, если только для дроби, стоящей после знака логарифма, будем брать абсолютную величину: например, в формуле (8) положим: $0<x<a$; взяв минус за знак интеграла и пользуясь формулой (10), имеем:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=-\int\frac{dx}{a^2-x^2}=-\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C;\quad \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a-x}{a+x}+C,$$

где теперь $a-x>0$; тот же самый результат получили бы, если бы в формуле (8) для $x-a$ взяли абсолютную величину:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

На основании сказанного из двух формул можно оставить только одну.

5) $\int\frac{x\,dx}{x^2+a}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+a)}{x^2+a}=\frac{1}{2}\ln(x^2+a)+C.$

Пример: $\int\frac{5x\,dx}{x^2\pm 3}=\frac{5}{2}\ln(x^2\pm 3)+C.$

6) Рассмотрим интеграл $\int\frac{dx}{x^2\mp a^2}$: на основании формул (8) и (5) можем заключить, что при верхнем знаке в ответе получится логарифмическая функция, при нижнем $-\operatorname{arctg}$.

Если приравнять знаменатель подинтегральной функции нулю, то в первом случае корни будут вещественными, во втором - мнимыми; следовательно и для интеграла

$\int\frac{dx}{ax^2+b}$ получим в результате интегрирования логарифмическую функцию или $arctg$ в зависимости от того: будут ли корни вещественными или мнимыми, т.е. $a$ и $b$ разных знаков или одинаковых (оба случая уже имели: см. форм. (9) и (7)).

7) Если ищется интеграл:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

то в ответе также получится логарифмическая функция или $arctg$, так как путем преобразования можно при вещественных корнях ( т.е. при $b^2-4ac>0$) свести к типу: $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$ и при мнимых корнях(т.е.при $b^2-4ac<0$) к типу:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}.$$

Воспользуемся теми преобразованиями, которые в алгебре применяются при выводе формулы корней квадратного уравнения:

$$ax^2+bx+c=\frac{4a(ax^2+bx+c)}{4a}=\frac{4a^2x^2+4abx+4ac}{4a}=\frac{4a^2x^2+4abx+b^2+4ac-b^2}{4a};$$

$$ax^2+bx+c=\frac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a}.$$

Очевидно, что за новую переменную надлежит взять $2ax+b$, т.е. производную знаменателя, тогда:

$$2ax+b=t;\quad dx=\frac{dt}{2a};\quad ax^2+bx+c=\frac{t^2+4ac-b^2}{4a}.$$

При вещественных корнях знаменателя под'интегральная функции:

$$b^2-4ac>0;\quad b^2-4ac=k^2;\quad 4ac-b^2=-k^2;$$

при мнимых корнях:

$$b^2-4ac<0; \quad 4ac-b^2>0; \quad 4ac-b^2=+k^2$$

В результате преобразований получаем:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=2\int\frac{dt}{t^2\mp k^2}.$$

Применяя при верхнем знаке формулу (8) и при нижнем форм.(5), найдем:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}+c; \quad b^2-4ac>0, \quad (11)$$

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,arctg\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+c; \qquad b^2-4ac<0. \quad (12)$$

Примеры: $1)\ J=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}; \sqrt{b^2-4ac}=1; 2ax+b=(x^2-5x+6)'=2x-5;$

$$J=\ln\frac{2x-6}{2x-4}+c=\ln\frac{x-3}{x-2}+c.$$

$2)\ J=\int\frac{dx}{9x^2-6x+10}; \sqrt{4ac-b^2}=18; \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}=\frac{1}{9}; 2ax+b=(9x^2-6x+10)'=18x-6;$

$$J=\int\frac{dx}{9x^2-6x+10}=\frac{1}{9}arctg\frac{18x-6}{18}+c=\frac{1}{9}arctg\frac{3x-1}{3}+c.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Полученные формулы можно было вывести без преобразований элементарной алгебры, взяв за новую переменную производную знаменателя: $2ax+b=t; \quad x=\frac{t-b}{2a}; \quad dx=\frac{dt}{2a};$

$$ax^2+bx+c=a\left(\frac{t-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{t-b}{2a}\right)+c=\frac{t^2+4ac-b^2}{4a}.$$

3) На основании формулы (11) найдем интеграл

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx}$$

(корни знаменателя вещественны):

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx}=\frac{1}{b}\ln\frac{ax}{ax+b}+c. \qquad (13).$$

9) В выведенных формулах для интегрирования рациональных дробей числителем под'интегральной функции была единица.

Рассмотрим теперь интеграл, где числителем будет двучлен первой степени:

$$\int\frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}.$$

Путем преобразования введем в состав числителя производную знаменателя, т.е. $2ax+b$.

$$mx+n=\frac{mx\,2a}{2a}+n=\frac{m\cdot 2ax}{2a}+n=\frac{m\cdot(2ax+b-b)}{2a}+n;$$

$$mx+n=\frac{m(2ax+b)}{2a}-\frac{mb}{2a}+n=\frac{m\cdot(2ax+b)}{2a}+\frac{2an-mb}{2a}.$$

Искомый интеграл получил вид:

$$\int\frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{m}{2a}\int\frac{(2ax+b)\,dx}{ax^2+bx+c}+\frac{2an-mb}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c};$$

$$\int\frac{(mx+n)\,dx}{ax^2+bx+c}=\frac{m}{2a}\ln(ax^2+bx+c)+\frac{2an-mb}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} \qquad (14).$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, уже рассмотрен.

Пример:

$$\int\frac{(3x+5)\,dx}{x^2-5x+6}=\frac{3}{2}\ln(x^2-5x+6)+\frac{25}{2}\int\frac{dx}{x^2-5x+6};$$

$$\int\frac{(3x+5)\,dx}{x^2-5x+6}=\frac{3}{2}\ln(x^2-5x+6)+\frac{25}{2}\ln\frac{x-3}{x-2}+C.$$

Приведем примеры применения формулы (14) к частным случаям:

1) $m=1;\quad n=0;\quad a=1;\quad b=0;\quad c=\mp k^2;$

$$\int\frac{x\,dx}{x^2\mp k^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2\mp k^2)+C.$$ (см. стр. 62)

2) $c=0$

$$\int\frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx}=\frac{m}{2a}\ln(ax^2+bx)+\frac{2an-mb}{2ab}\ln\frac{ax}{ax+b}$$

Здесь воспользовались формулой (13).

10) Если в числителе целый алгебраический рациональный многочлен, степень которого равна или выше степени знаменателя, то нужно числителя разделить на знаменателя или применить преобразование.

Приведем примеры:

1) $$\int\frac{(10x+7)\,dx}{5x+2}=\int\left(2+\frac{3}{5x+2}\right)dx=2x+\frac{3}{5}\ln(5x+2)+c.$$

2) $$\int\frac{x^4-5x^3+5x^2+5x-5}{x^2-5x+6}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2-5x+6}\right)dx=\frac{x^3}{3}-x+\int\frac{dx}{x^2-5x+6};$$

$$\int\frac{x^4-5x^3+5x^2+5x-5}{x^2-5x+6}=\frac{x^3}{3}-x+\ln\frac{x-3}{x-2}+c.$$

3) $$\int\frac{x^2dx}{x^2+k^2}=\int\frac{x^2+k^2-k^2}{x^2+k^2}dx=\int\frac{x^2+k^2}{x^2+k^2}dx-\int\frac{k^2dx}{x^2+k^2};$$

$$\int\frac{x^2dx}{x^2+k^2}=\int dx-k^2\int\frac{dx}{x^2+k^2}=x-k\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{k}+c.$$

## c) Интегрирование иррациональных функций.

I) Ниже указанные интегралы, в состав подинтегральной функции которых входит квадратный корень из линейной функции, т.е. $\sqrt{ax+b}$, найдутся легко, если за новую переменную принять $ax+b=t$.

Предоставляем читателям самим произвести операцию интегрирования, здесь приведем только результаты:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C; \qquad (15)$$

$$\int\sqrt{ax+b}\cdot dx=\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C; \qquad (16)$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}+C; \qquad (17)$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx=\frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C. \qquad (18)$$

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}}$.

К этому интегралу приводятся и другие интегралы, часто встречающиеся в практических задачах.

При $m>0$ в результате интегрирования получается логарифмическая функция, при $m<0$ – $\arcsin$.

Рассмотрим первый случай, причем положительные числа условимся записывать в виде квадрата.

Для простоты вывода положим $m=1$, тогда интеграл примет вид:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$$

Возьмем подстановку: $\sqrt{x^2\pm a^2}=z-x$; $x^2\pm a^2=z^2-2zx+x^2$; $\pm a^2=z^2-2zx$. Дифференцирование дает:

$$z\,dz-z\,dx-x\,dz=0;\quad dx=\frac{(z-x)\,dz}{z};$$

тогда:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx=\int\frac{1}{z-x}\cdot\frac{(z-x)\,dz}{z}=\int\frac{dz}{z}=\ln z+C.$$

Для $z$ имеем: $z=x+\sqrt{x^2\pm a^2}$, следовательно:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+C. \qquad (19)$$

Пользуясь полученной формулой, найдем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{b^2x^2\pm a^2}}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm\frac{a^2}{b^2}}}=\frac{1}{b}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm\frac{a^2}{b^2}}\right)+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{b^2x^2\pm a^2}}=\frac{1}{b}\ln\left(bx+\sqrt{bx^2\pm a^2}\right)+C. \qquad (20)$$

$(-\frac{1}{b}\ln b$ включили в $C)$.

Рассмотрим теперь второй случай. При $m=-1$ получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Этот интеграл уже имели (см. стр. 29), запишем результат:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \qquad (21)$$

На основании же формулы (21):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-x^2}}=\frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=\frac{1}{b}\arcsin\frac{bx}{a}+C. \qquad (22)$$

3) $\int\sqrt{mx^2+n}.dx.$

Этот интеграл встречается, между прочим, при вычислении площадей криволинейных фигур.

Выведем сначала вспомогательную формулу:

$$\int\sqrt{mx^2+n}.dx=\int\frac{mx^2+n}{\sqrt{mx^2+n}}dx=\int\frac{mx^2\,dx}{\sqrt{mx^2+n}}+n\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}};$$

откуда получаем:

$$\int\frac{mx^2\,dx}{\sqrt{mx^2+n}}=\int\sqrt{mx^2+n}.dx-n\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}} \qquad (23)$$

Применим к отысканию заданного интеграла интегрирования по частям:

$$\int\sqrt{mx^2+n}\cdot dx=x\sqrt{mx^2+n}-\int x\,d\sqrt{mx^2+n};$$

$$\int\sqrt{mx^2+n}\cdot dx=x\sqrt{mx^2+n}-\int\frac{mx^2\,dx}{\sqrt{mx^2+n}}$$

Пользуясь форм. |23| имеем:

$$\int\sqrt{mx^2+n}\cdot dx=x\sqrt{mx^2+n}-\int\sqrt{mx^2+n}\cdot d+n\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}};$$

переносим первый интеграл правой части в левую и делаем приведение:

$$2\int\sqrt{mx^2+n}\cdot dx=x\sqrt{mx^2+n}+n\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}},$$ — отсюда:

$$\int\sqrt{mx^2+n}\cdot dx=\frac{1}{2}x\sqrt{mx^2+n}+\frac{n}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}} \qquad (24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученная формула дает возможность отыскание заданного интеграла свести к уже известному интегралу; с такой формулой (приведения) уже встречались (см. форм. I4 ). На основании форм. (24) искомый интеграл выражается суммой алгебраической и логарифмической функций или алгебраической

На основании форм.(24) при помощи форм. (20) и (22) найдем:

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C. \qquad (25)$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C. \qquad (26)$$

П р и м е р ы:

1) $\int\sqrt{x^2-5}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-5}-\frac{5}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-5})+C.$

2) $\int\sqrt{3-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{3-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$

4) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{mx^2+n}}$. Этот интеграл уже имели (см.стр. 34 прим. 3), запишем результат:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{mx^2+n}}=\frac{1}{m}\sqrt{mx^2+n}+C. \qquad (27).$$

5) При пользовании форм. (27) легко получится ниже приводимая формула:

$$\int\frac{(px+q)dx}{\sqrt{mx^2+n}}=p\int\frac{xdx}{\sqrt{mx^2+n}}+q\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}};$$

$$\int\frac{(px+q)dx}{\sqrt{mx^2+n}}=\frac{p}{m}\sqrt{mx^2+n}+q\int\frac{dx}{\sqrt{mx^2+n}}. \qquad (28)$$

Приведем примеры применения этой формулы к частным случаям:

$$\int\frac{(px+q)dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=p\sqrt{x^2\pm a^2}+q\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C;$$

$$\int\frac{(px+q)dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-p\sqrt{a^2-x^2}+q\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

ПРИМЕЧАНИЕ. Рассматривая формулы интегрирования алгебраических функций, видим, что интегралы алгебраических функций часто выражаются логарифмическими функциями, $arctg$, $arcsin$, иногда даже суммой двух логарифмических функций, суммой логарифмической и $arctg$ или же суммой алгебраической и логарифмической, алгебраической и $arctg$ или $arcsin$.

## 2. Интегрирование трансцендентных функций.

### а) Тригонометрические функции.

1) На стр. 42 уже были выведены формулы

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln tg\frac{x}{2}+C. \qquad (29)$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C. \qquad (30)$$

Пример: $\int\frac{x^2dx}{\cos x^3}$.

Подстановка дает: $x^3=t$; $3x^2dx=dt$; $x^2dx=\frac{1}{3}dt$;

$$\int\frac{x^2dx}{\cos x^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{1}{3}\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)+C$$

$$\int\frac{x^2dx}{\cos x^3}=\frac{1}{3}\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x^3\right)+C.$$

2) Легко найдутся следующие интегралы:

$$\int tg\,x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=\int\frac{d(-\cos x)}{\cos x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos x};$$

$$\int tg\,x\,dx=-\ln\cos x+C. \qquad (31)$$

$$\int ctg\,x\,dx=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\int\frac{d\sin x}{\sin x};$$

$$\int ctg\,x\,dx=\ln\sin x+C. \qquad (32)$$

3) $\int\sin^2 x\,dx.$

Из тригонометрии известно:

$$\sin x=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}},$$

откуда:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

тогда:

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx;$$

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d2x;$$

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\cos x+C. \qquad (33)$$

Точно также найдем $\int\cos^2 x\,dx$:

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,d=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx;$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x+C. \qquad (34)$$

б) Особые типы интегралов.

$$M=\int e^{ax}\sin bx\,dx; \qquad N=\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Применяя интегрирование по частям к вычислению этих интегралов, мы не получим непосредственно самих интегралов, а только уравнения, из которых они найдутся ( об этом было уже упомянуто на стр. 41 и с этим фактом уже встречались при выводе форм. 24 на стр. 69.

$$M=\frac{1}{a}\int \sin bx\,de^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}\,d\sin bx;$$

$$M=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, обозначен через $N$, поэтому:

$$M=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}N \quad (\text{урав. 1}).$$

Точно также получим:

$$N=\frac{1}{a}\int \cos bx\,de^{ax}=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\,d\cos bx;$$

$$N=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx;$$

$$N=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}M \quad (\text{урав. 2}).$$

Упрощая найденные уравнения и сопоставляя их, имеем:

$$aM+bN=e^{ax}\sin bx;$$

$$-bM+aN=e^{ax}\cos bx.$$

Помножая первое уравнение на $a$, второе на $-b$, и складывая эти уравнения, найдем $M$ и к результату припишем $C$.

$$M=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$$

Точно также получим:

$$N=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$$

Запишем теперь формулы:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C; \qquad (35)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}+C. \qquad (36).$$

Упражнения для самостоятельной проработки.

При решении практических задач, когда вычисление интеграла требует затраты времени, приходится пользоваться готовыми формулами, но чтобы овладеть техникой интегрирования, надлежит повторить вывод формул на числовых примерах: поэтому необходимо, без пользования формулами, вычислить даваемые ниже интегралы, полученные же результаты проверить по формулам.

1) $\int 3(5x-2)^2dx$; 2) $\int 4(3x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$; 3) $\int 7(5ay^3+2b)y^2dy$; 4) $\int (az^{3/2}-1)z^{2/3}dz$;

5) $\int\frac{3b\,dx}{2ax-4}$; 6) $\int\frac{2x^3dx}{(3x^4-1)^2}$; 7) $\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2x^{\frac{1}{2}}-b}$; 8) $\int\frac{4dx}{3+x^2}$; 9) $\int\frac{8d\varphi}{5+2\varphi^2}$; 10) $\int\frac{3dx}{9+x^2}$;

11) $\int\frac{7du}{u^2-4}$; 12) $\int\frac{2df}{f^2-1}$; 13) $\int\frac{3dz}{z^2-2}$; 14) $\int\frac{dx}{2x^2-3}$; 15) $\int\frac{dy}{2-y^2}$; 16) $\int\frac{dp}{5-2p^2}$;

17) $\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}$; 18) $\int\frac{3z\,dz}{2z^2-1}$; 19) $\int\frac{dx}{x^2-6x+8}$; 20) $\int\frac{2dx}{6x^2-5x+1}$; 21) $\int\frac{2dp}{p^2-10p+29}$;

22) $\int\frac{dz}{z^2-2z+2}$; 29) $\int\frac{(2x+5)dx}{4x^2-4x-2}$; 24) $\int\frac{e^x dx}{2e^{2x}+3e^x-1}$; 25) $\int\frac{y\,dy}{3y^2+2y+2}$;

26) $\int\frac{4dz}{3z^2+z}$; 27) $\int\frac{(x^3+3x)dx}{x^2-2x-3}$; 28) $\int\frac{(y^2+2y+5)dy}{y^2+2y+3}$; 29) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$;

30) $\int \sqrt{3x-4}\,dx$; 31) $\int \frac{z\,dz}{\sqrt{2z+3}}$; 32) $\int 2u\sqrt{4u-1}\,du$; 33) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

34) $\int \frac{3dp}{\sqrt{p^2+9}}$; 35) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$; 36) $\int \frac{dz}{\sqrt{5-2z^2}}$; 37) $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$; 38) $\int \sqrt{2-x^2}\,dx$;

39) $\int \sqrt{2x^2+3}\,dx$; 40) $\int \frac{(2z+1)dz}{\sqrt{5-2z^2}}$; 41) $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-1}}$; 42) $\int \sin^2(2x+3)\,dx$;

43) $\int \cos^2(ax+b)\,dx$; 44) $\int x\cos^2(x^2+1)\,dx$; 45) $\int \frac{dx}{\sin 3x}$; 46) $\int \frac{dz}{\cos 2z}$;

3. Практические задачи (для желающих в порядке соцсоревнования).

Задача I. Движение тела по инерции в сопротивляющейся среде.

Для простоты будем рассматривать движение тела на поверхности воды.

Пусть тело, имеющее форму шара, находится на поверхности воды (черт. 64). Сила тяжести, приложенная к центру шара, направлена вертикально вниз; приложенная также к центру шара сила давления воды,- так сказать, выталкивания воды - (равная весу вытесняемой погруженной частью тела воды) направлена вертикально вверх. Эти силы равны; поэтому не будем принимать во внимание силу притяжения земли (уравновешивается давлением воды). Начнем двигать тело по поверхности воды, тотчас же возникает сила трения тела о воду, пропорциональная скорости тела и направленная в сторону прямо обратную движению тела, т.е.:

$$F=-kv; \qquad (ур. 1)$$

здесь $F$ - сила трения; $v$ - скорость тела; $k$ - коэффициент трения, положительное, постоянное в условиях задачи число; знак минус показывает, что направление силы трения обратное направлению скорости тела.

Пусть в тот момент, когда мы прекратим двигать тело, скорость тела была $v_0$; очевидно тело будет продолжать по инерции движение,- и если бы не было силы трения, то это движение было бы равномерным без ускорения.

Поставим теперь задачу.

Определить движение тела, которое начало по инерции двигаться по поверхности воды с начальной скоростью $v_0$; сила трения пропорциональна скорости тела и направлена в сторону противоположную движению.

Счет времени начнем с того момента, когда тело начало двигаться по инерции,- тогда при $t=0$, очевидно скорость будет $v_0$:

Обозначим ускорение силы трения через $w$, массу тела через $m$ и силу трения попрежнему через $F$,- следовательно (см. задача вторая стр. 50 ):

$$F=mw.$$

Принимая во внимание уравн. (I), получим:

$$mw=-kv;$$

но мы уже не раз имели $w=\frac{dv}{dt}$, тогда:

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=-kv \qquad (ур\ 2)$$

или:

$$dv=-\frac{k}{m}v\,dt.$$

Отделяем переменные:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt;$$

интегрирование дает:

$$\ln v=-\frac{k}{m}t+\ln C$$

(Относительно $C$ см.задачу на стр.21 ).

отсюда:

$$\ln v - \ln C = -\frac{k}{m}t; \quad \ln\frac{v}{C} = -\frac{k}{m}t.$$

Потенцируем:

$$v = Ce^{\frac{k}{m}t} \qquad (ур\,3).$$

Для определения постоянной интегрирования подставим в уравн. (3) $v_0$ и $t=0$, тогда:

$$v_0 = Ce^0; \qquad C = v_0;$$

теперь окончательно имеем:

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}. \qquad (ур\,4).$$

ПРИМЕЧАНИЕ: получилась показательная функция; обратим внимание: уравн.(2) показывает, что скорость изменения функции пропорциональна функции и на основании задачи второй (см. стр. 21 ) сразу можно было бы написать ответ, что уже не раз и делали.

Для определения пройденного пути подставим $\frac{ds}{dt}$ вместо $v$ в уравн. (4):

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \quad {}^{\frac{k}{m}t}; \qquad ds = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}dt; \qquad s = v_0\int e^{-\frac{k}{m}t}dt.$$

Возьмем подстановку: $-\frac{k}{m}t = z; \quad dt = -\frac{m}{k}dz,$

тогда:

$$s = v_0\int e^{-\frac{k}{m}t}dt = -v_0\frac{m}{k}\int e^{z}dz = -v_0\frac{m}{k} \quad {}^{z} + C,$$

следовательно:

$$s = -v_0\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + C. \qquad (ур.\,5).$$

Так как при $t=0$, конечно $s_0=0$, то из уравн.(5) найдем:

$$0=-v_0\frac{m}{k}e^0+C; \qquad C=v_0\frac{m}{k}.$$

Уравн. (5) получит вид:

$$s=-v_0\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}+v_0\cdot\frac{m}{k},$$

отсюда:

$$s=\frac{v_0 m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \qquad (ур.6).$$

Задача решена; найдены две основные формулы: скорости (уравн.4) и пройденного пути (уравн.6).

Если перепишем уравн. (4) в виде:

$$v=\frac{v_0}{e^{\frac{k}{m}t}},$$

то становится очевидным, что $v=0$ только при $t$ равном $\infty$; теоретически выходит, что тело никогда не остановится; но вновь полученная формула показывает, что уже при малых значениях $t$ скорость $v$ будет ничтожно малая величина; практически тело остановится очень скоро. Считая в уравн. (6) $t$ равным бесконечности, найдем тот путь, который теоретически должно пройти тело:

$$s=\frac{v_0 m}{k}. \qquad (ур.7).$$

Тот же путь будет и практически пройден.

Применим полученные формулы к частному случаю.

Моторная лодка двигалась при работе мотора со скоростью 12 км|час; через 21 секунду после выключения мотора скорость ее была только 7 км|час. Найти путь, пройденный лодкой по инерции до остановки, и скорость через 3 м после остановки мотора.

Хотя $m$ и $k$ неизвестны, но дано условие, позволяющее найти $\frac{K}{m}$. Очевидно $v_0 = 12$ км|час; подставляя в уравн. (4) вместо $v$; $v_0$, $t$ соответственно: $\frac{7 \cdot 10^5}{60 \cdot 60}$; $\frac{12 \cdot 10^5}{60 \cdot 60}$ (выражаем в см); 21, имеем:

$$7 \cdot 10^5 = 12 \cdot 10^5 e^{-\frac{K}{m} 21}; \quad 7 = 12 e^{-\frac{K}{m} \cdot 21};$$

логарифмирование дает:

$$-\frac{K}{m} \cdot 21 = \ln 7 - \ln 12$$

(при натуральных логарифмах $\ln e = 1$), или:

$$\frac{K}{m} = \frac{\ln 12 - \ln 7}{21}.$$

Обыкновенно при вычислениях пользуются таблицами десятичных логарифмов, но так как числа 12 и 7 избавляют нас от интерполирования, то удобнее воспользоваться таблицами натуральных логарифмов:

$$\frac{K}{m} = \frac{2,4849 - [illegible]}{21} = \frac{[illegible]}{21} = [illegible]$$

Пользуясь дальше обыкновенными логарифмами, по формуле (4) найдем, что скорость через 3 м после остановки мотора будет 3,3 см в секунду или 117,5 метра в час. За 3 минуты после остановки мотора лодка пройдет (см. форм. 6) 128,4 м; и по формуле (7) найдем, что лодка до полной остановки должна пройти всего 129,7 м.

<u>Задача 2.</u> Падение тела в воздухе без начальной скорости.

1) В предыдущей задаче при малой скорости тела сопротивление среды движению предполагалось пропорциональным скорости тела; при больших же скоростях, как при падении тела в воздухе, сопротивление считается пропорциональным квадрату скорости и также направленным в сторону обратную движению тела.

Условимся считать направление вниз положительным.

Сила притяжения направлена вертикально вниз и при надлежащем выборе единиц (см.задача вторая, стр. 50) равна $mg$, сила сопротивления - трение - направлена вертикально вверх (см.предыдущ.зад.) и равна $-kv^2$. Таким образом равнодействующая, которую обозначим через $K$, равна:

$$K = mg - kv^2 \qquad (ур. 1)$$

Если $w$ ускорение равнодействующей, то $K = mw$ (см. другие задачи) и уравн. (I) перепишется так:

$$mw = mg - kv^2,$$

но

$$w = \frac{dv}{dt},$$

поэтому:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

или:

$$m\,dv = (mg - kv^2)\,dt;$$

отделяем переменные:

$$\frac{m\,dv}{mg - kv^2} = dt; \quad \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v^2} = dt;$$

отсюда, обозначая $\frac{k}{m}$ через $a$:

$$\int\frac{dv}{g - av^2} = t + C.$$

Так как корни знаменателя вещественны, то применяем формулу (II) (см.стр. 64) и после упрощения получим:

$$\frac{1}{2\sqrt{ga}}\ln\frac{v\sqrt{a} + \sqrt{g}}{v\sqrt{a} - \sqrt{g}} = t + C.$$

Так как $v > 0$ (направление скорости вниз), то числитель дроби, стоящей под знаком логарифма, положителен, в знаменателе же при начальной скорости $v_0 = 0$ получаем: $-\sqrt{g}$, тогда в силу замечания на стр. 62 надлежит взять абсолютную величину знаменателя; изменяя знаки знаменателя, имеем:

$$\frac{1}{2\sqrt{ga}} \cdot \ln \frac{\sqrt{g}+v\sqrt{a}}{\sqrt{g}-v\sqrt{a}} = t + C. \qquad (\text{ур. } 2).$$

Для нахождения постоянной интегрирования в уравн.(2) положим $t_0 = 0$, $v_0 = 0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{ga}} \ln \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = C; \quad \frac{1}{2\sqrt{ga}} \ln 1 = C; \quad C = 0, -$$

следовательно $$\frac{1}{2\sqrt{ga}} \ln \frac{\sqrt{g}+v\sqrt{a}}{\sqrt{g}-v\sqrt{a}} = t. \qquad (\text{ур. } 3).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: полученная формула сохраняет свою силу при $\sqrt{g}-v\sqrt{a}>0$, т.е. при $v<\sqrt{\frac{g}{a}}$; как увидим ниже, скорость всегда будет меньше $\sqrt{\frac{g}{a}}$.

Потенцируем уравн. (3):

$$\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{a}}{\sqrt{g}-v\sqrt{a}} = e^{2\sqrt{ga}\,t},$$

отсюда:

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{ga}\cdot t}-1}{e^{2\sqrt{ga}\cdot t}+1}.$$

Для удобства выводов полученной формуле придают другой вид, помножая числителя и знаменателя на $e^{-\sqrt{ga}\cdot t}$:

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{e^{\sqrt{ga}\cdot t} - e^{-\sqrt{ga}\cdot t}}{e^{\sqrt{ga}\cdot t} + e^{-\sqrt{ga}\cdot t}}$$

Второй множитель правой части уравн (4) меньше I, поэтому $v<\sqrt{\frac{g}{a}}$ (см. предыдущее замечание).

Так как

$$\lim \left| e^{-\sqrt{ga}\cdot t} \right|_{t\to\infty} = \lim \left| \frac{1}{e^{\sqrt{ga}\cdot t}} \right|_{t\to\infty} = 0,$$

то предельная величина скорости будет:

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \qquad (ур.5).$$

При $t=2$, т.е. через 2 сек. после начала падения, скорость ( в зависимости от $a$ ) почти достигает своей предельной величины, так что на практике вполне достаточно пользоваться уравн. (5), действительно: полагая $\sqrt{ga}=2,5$, имеет для $t=2$.

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \frac{148,41}{148,42}$$

Для нахождения пути подставим вместо $v$ в уравн. (4) $\frac{ds}{dt}$:

$$s = \sqrt{\frac{g}{a}} \int \frac{(e^{\sqrt{ga}\cdot t} - e^{-\sqrt{ga}\cdot t})\,dt}{e^{\sqrt{ga}\cdot t} + e^{-\sqrt{ga}\cdot t}}$$

возьмем знаменатель за новую переменную:

$$e^{\sqrt{ga}\cdot t} + e^{-\sqrt{ga}\cdot t} = z; \quad \sqrt{ga}(e^{\sqrt{ga}\cdot t} - e^{\sqrt{ga}\cdot t})dt = dz; \quad (e^{\sqrt{ga}\cdot t} - e^{-\sqrt{ga}\cdot t})dt = \frac{dz}{\sqrt{ga}},$$

поэтому:

$$s = \sqrt{\frac{g}{a}} \int \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{\sqrt{ga}} = \frac{1}{a} \ln z + C;$$

$$s = \frac{1}{a} \ln (e^{\sqrt{ga}\cdot t} + e^{-\sqrt{ga}\cdot t}) + C; \qquad (ур.6)$$

при $t_0=0$ и $s_0=0$ и в силу уравн. (6) имеем:

$$0 = \frac{1}{a} \ln (e^0 + e^0) + C; \qquad C = -\frac{1}{a} \ln 2,$$

следовательно:

$$s = \frac{1}{a} \ln \frac{(e^{\sqrt{ga}\cdot t} + e^{-\sqrt{ga}\cdot t})}{2} \qquad (ур.7).$$

ист 6-й

Богомолов, С.А. и др.

При всех значениях $t$ больших некоторой величины (какой именно - это зависит от значения $\alpha$ ), слагаемым $e^{-\sqrt{ga}.t}$ можно пренебречь и на практике пользоваться формулой:

$$s=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{2}e^{\sqrt{ga}.t},$$

или

$$s=\frac{1}{a}(\sqrt{ga}t\ln e-\ln 2)$$

и окончательно:

$$s=\sqrt{\frac{g}{a}}t-\frac{\ln 2}{a}. \qquad (ур.8).$$

Выходит так, что будто после некоторого промежутка времени тело начинает двигаться равномерно с предельной скоростью $\sqrt{\frac{g}{a}}$ из точки, расположенной на $\frac{\ln 2}{a}$ см выше точки начала падения тела.

Задача теоретически решена полностью, приведем теперь практический пример.

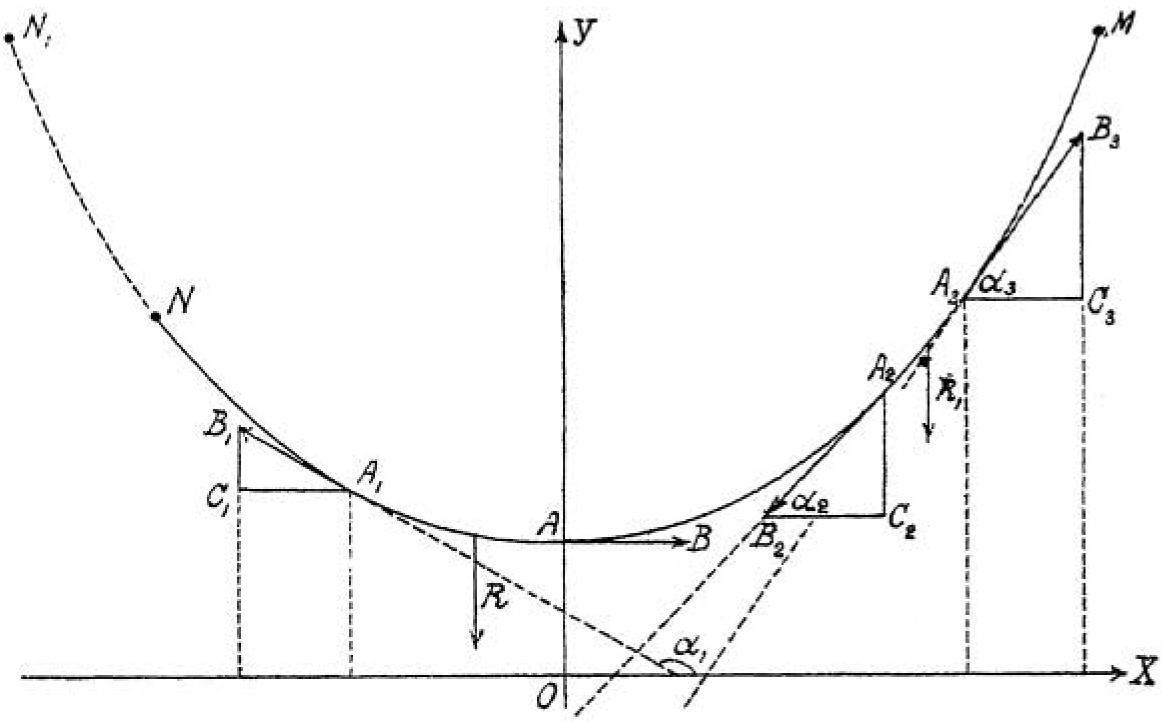
2) Воздухоплаватель спускается на парашюте, имеющем форму полушария радиуса 3 м. Вес его вместе с весом парашюта 85 кг. Какова будет скорость спуска $v$ через 2 сек. после его начала и путь пройденный за это время? Обыкновенно полагают, что $k=k_1P$, где $P$ площадь наибольшего сечения, перпендикулярного к направлению движения; $k_1$ зависит от плотности воздуха, температуры его, а главным образом от формы тела,- при форме вогнутого полушария $k_1=0,0081$ ( при давлении 760 мм и $15^0$ ).

На основании условия задачи получим:

$$a=\frac{k}{m}=\frac{k_1P}{m}=\frac{0,00081.\pi.300^2}{85000}=0,002694.$$

Считая $g = 981$ см, по формуле (5) найдем для предельной скорости: 603,40 см $\approx$ 6,03 м; и по формуле(4) для скорости в конце второй секунды: 602,80 см$\approx$ 6,03 м. Длина пройденного центром тяжести за 2 сек. пути по формуле (7) будет: 950,00 см$\approx$9,5 см; и по формуле(8): 949,65 см $\approx$ 9,5 м.

Задача 3. Провисание тяжелой нити. Тяжелая гибкая нить, толщиной которой пренебрежем, закреплена в точках $M$ и $N$ (черт.65). Определить вид кривой провисания, считая $p$, вес единицы




Черт. 65.

длины нити, одним и тем же по всей кривой.

Пусть уравнение кривой будет: $y=f(x)$; функция $f(x)$ непрерывна по всей кривой и имеет *minimum*: низшая точка $A$, где касательная к кривой параллельна оси $OX$. Проведем ось ординат через точку $A$ вертикально вверх и ось абсцисс через любую точку оси $OY$ горизонтально.

Сила, с которой тяжелая дуга $AA_1$ притягивается к земле, изображена вектором $R$, направленным вертикально вниз и приложенным в центре тяжести дуги. Под действием силы тяжести дуга $AA_1$ упала бы вниз, если бы не была удерживаема силами натяжения дуг $AM$ и $A_1N$; первая сила изображена вектором $\overrightarrow{AB}$ (пусть длина его $H$), приложена к точке $A$ и направлена вправо от точки $A$ по касательной, параллельной оси $OX$; вторая сила изображена вектором $\overrightarrow{A_1B_1}$ (обозначим его через $T$), приложена к точке $A_1$ и направлена по касательной влево от точки $A_1$. Так как дуга $AA_1$ остается без движения в равновесии, то все три действующие на нее силы уравновешиваются и равнодействующая их равна нулю; следовательно и горизонтальная и вертикальная проекция этой равнодействующей также равна нулю. Из аналитической геометрии известно, что проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов, поэтому:

$$Проек.(\overrightarrow{A_1B_1})_x + проек.(\overrightarrow{AB})_x + проек.(R)_x = 0;$$

но проекция $(R)_x = 0$, так как направление силы тяжести перпендикулярно к оси абсцисс, тогда:

$$проек.(\overrightarrow{A_1B_1})_x + проек.(\overrightarrow{AB})_x = 0; \quad проек.(T)_x + проек.(\overrightarrow{AB})_x = 0 \quad (ур.1)$$

но вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен оси $OX$ и направлен в ту же сторону, значит: проекция $(\overrightarrow{AB})_x = AB = H$ и уравн.(I) перепишется так: $проек.(T)_x + H = 0$; $проек.(T)_x = -H$.

Принимая во внимание только абсолютные величины проекций, получим:

$$\left|проек.(T)_x\right| = H. \qquad (ур.2).$$

Так как точку $A_1$ мы могли взять где угодно на кривой и справа и слева точки $A$, то из уравн. (2) вытекает, что горизонтальные проекции силы натяжения в каждой точке тяжелой кривой по абсолютной величине равны.

Возьмем теперь элементарную дугу $A_2 A_3$; вектора, изображающие две силы натяжения и силу притяжения к земле, указаны на чертеже. Для горизонтальных проекций сил натяжений имеем:

$$\overrightarrow{C_2 B_2} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{A_3 C_3};$$

в силу уравн.(2) по абсолютной величине эти проекции равны $H$, т.е.:

$$\left|\overrightarrow{C_2 B_2}\right| = \left|\overrightarrow{A_3 C_3}\right| = H \qquad \text{(ур. 3)}.$$

Принимая во внимание уравн.(3) и беря только абсолютную длину отрезков, из треугольников $A_2 B_2 C_2$ и $A_3 B_3 C_3$ найдем:

$$|A_2 C_2| = H tg\,\alpha_2; \quad |C_3 B_3| = H tg\,\alpha_3 \qquad \text{(ур. 4)}.$$

Вектор $A_2 B_2$ направлен от точки $A_2$ к точке $B_2$, поэтому его вертикальная проекция (от точки $A_2$ к точке $C_2$) будет отрицательна: направлена вертикально вниз; в силу уравн. (4) имеем:

$$\text{проек.}\,(\overrightarrow{A_2 B_2})_y = -H tg\,\alpha_2.$$

Точно также получим: $\text{проек.}\,(\overrightarrow{A_3 B_3})_y = H tg\,\alpha_3$.

Обозначим длину дуги $A_2 A_3$ через $\Delta s$; сила $R_1$, с которой эта дуга притягивается к земле, равна весу дуги, т.е.: $p\,\Delta s$ (произведению веса единицы длины на длину дуги); так как сила притяжения направлена вниз, то очевидно): $|R_1|_y = -p\cdot\Delta s$.

Дуга $A_2 A_3$ находится в равновесии, поэтому сумма вертикальных проекций должна быть равна нулю.

$$-H tg\alpha_2 + H tg\alpha_3 - p\Delta s = 0 \qquad (ур. 5).$$

Обозначая $\alpha_3 - \alpha_2$ через $\Delta\alpha_2$, получим:

$$\alpha_3 - \alpha_2 = \Delta\alpha_2; \quad \alpha_3 = \alpha_2 + \Delta\alpha_2; \; tg\alpha_3 = tg(\alpha_2 + \Delta\alpha_2); \; tg\alpha_3 = tg\alpha_2 + \Delta tg\alpha_2$$

Уравн. (5) примет вид:

$$-H tg\alpha_2 + H(tg\alpha_2 + \Delta tg\alpha_2) - p.\Delta s = 0; \; -H tg\alpha_2 + H tg\alpha_2 + H.\Delta tg\alpha_2 - p\Delta s = 0;$$

$$H.\Delta tg\alpha_2 - p.\Delta s = 0. \qquad (ур. 6).$$

Так как тангенс угла наклона равен производной функции, то вместо полученного равенства напишем:

$$H.\Delta y' - p.\Delta s = 0;$$

или, переходя к дифференциалам:

$$H.dy' - p.ds = 0.$$

Формула дифференциальной дуги нам известна, поэтому окончательно получим:

$$H dy' - p\sqrt{1+(y')^2}.dx = 0.$$

Отделяем переменные:

$$\frac{H}{p} \cdot \frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = dx,$$

так как $\frac{H}{p}$ величина постоянная, то, обозначая ее через $a$ имеем:

$$a \cdot \frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = dx; \qquad \frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Интегрирование дает:

$$\ln\left[y' + \sqrt{1+(y')^2}\right] = \frac{x}{a} + c.$$

Так как для точки $A$ очевидно: $x=0$ и $y'=0$, то:

$$\ln(0+\sqrt{1+0}) = c; \qquad \ln 1 = c; \qquad c=0;$$

отсюда:

$$\ln(y' + \sqrt{1+(y')^2} = \frac{x}{a},$$

или потенцируя:

$$y' + \sqrt{1+(y')^2} = e^{\frac{x}{a}} \qquad (\text{ур. } 7).$$

Найдем $y'$ из уравн. (7):

$$\sqrt{1+(y')^2} = e^{\frac{x}{a}} - y'; \quad 1+(y')^2 = e^{\frac{2x}{a}} - 2e^{\frac{x}{a}}y' + (y')^2; \quad y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{2x}{a}}-1}{e^{\frac{x}{a}}};$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{\frac{x}{a}}\right)$$

и окончательно:

$$dy = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx.$$

Интегрирование не представит затруднений:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) + c. \qquad (\text{ур. } 8).$$

Точка $O$ на оси ординат взята нами совершенно произвольно; возьмем ее так, чтобы длина отрезка $OA$ равнялась бы $a$, тогда для точки $A$ имеем: $x=0$ и $y=a$ и на основании уравн.(8):

$$a = \frac{a}{2}(e^0+e^0)+c; \qquad a = \frac{a}{2}\cdot 2 + c; \qquad c=0;$$

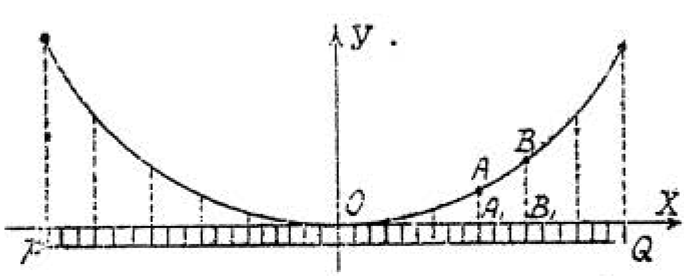
следовательно:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad \text{(уравнение цепной линии).}$$

Поставленная задача решена: мы получим уравнение <u>цепной линии</u>.

ЗАМЕЧАНИЕ. Значение постоянной величины нам неизвестно; для нахождения его, как и стрелы провисания $f$, необходимы дополнительные условия и расширение математического аппарата. Считая $a$ известным, исследуйте саму кривую: расположение относительно осей, симметрия, отсутствие точек перегиба, низшая точка, наклон в разных точках.

Возьмем случай цепного моста (черт.66), когда весом цепи вполне можно пренебречь по сравнению с весом горизонтальной нагрузки $PQ$. Так как вес тяжелой дуги $AB$ во внимание не принимается, то остается взять только вес горизонтальной нагрузки $A_1B_1$. Обозначая длину отрезка $A_1B_1$ через $\Delta x$ и считая вес единицы длины горизонтальной нагрузки $p$ одинаковым на всем протяжении $PQ$, для веса нагрузки $A_1B_1$ найдем: $p\Delta x$. Тогда




Черт. 66.

вместо уравнения $Hdy' - pds = 0$, получим: $Hdy' - pdx = 0$; откуда: $Hy' = px + C$; как и раньше найдем, что $C = 0$, поэтому: $Hy' = px$ или: $Hdy = pxdx$ и окончательно:

$$y = \frac{p}{2H}x^2 + C_1$$

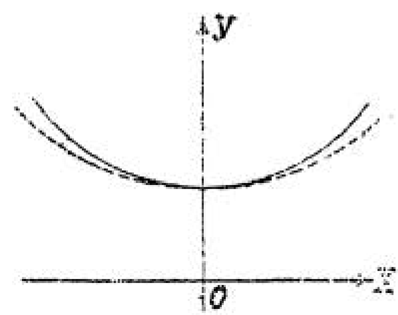
Начало координат находится в низшей точке кривой; для точки $O$ имеем $x=0$ и $y=0$; следовательно:

$$0=\frac{p}{2H}\cdot 0+C_1;\quad C_1=0.$$

Итак кривая провисания будет парабола:

$$y=\frac{p}{2H}x^2.$$

Если провисание цепной линии небольшое, что на практике часто имеет место (провисание телеграфных проводов), и вместо длины дуги приближенно можно взять длину ее горизонтальной проекции, то кривая провисания почти совпадает с параболой и на практике заменяется параболой. На черт. 67 парабола нанесена пунктиром.



Черт. 67.

## § 27. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

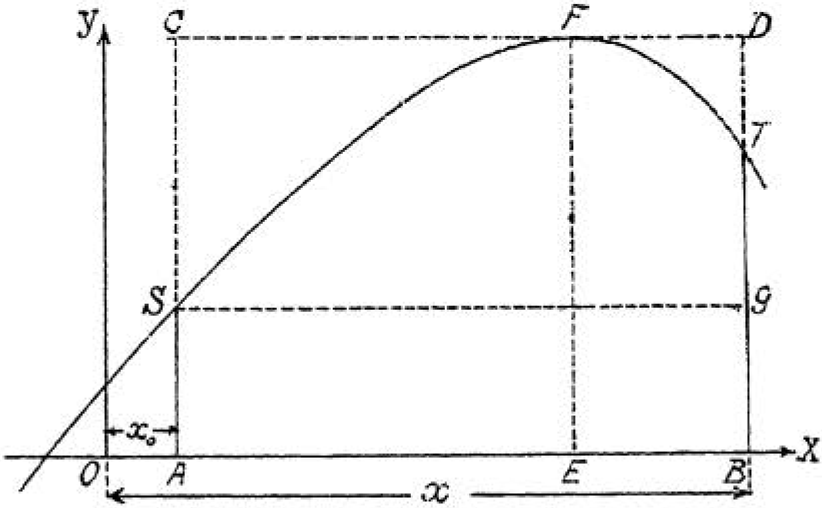
Вопрос об отыскании скорости движения и вопрос о проведении касательной к кривой привели, с одной стороны, Ньютона, с другой, Лейбница к нахождению предела отношения двух бесконечно-малых величин (приращения функции к приращению аргумента), который лежит в основе всего дифференциального исчисления. Вопрос об отыскании первообразной функции, в той трактовке, которую мы ему придали, явился задачей обратной дифференцированию. Теперь нам надлежит познакомиться с новой весьма жизненной математической идеей: нахождения предела суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых, возникшей еще раньше дифференциального исчисления при вычислении площади, ограниченной кривой; этот благотворный принцип находит себе применение во многих вопросах науки и техники.

I. Площадь криволинейной трапеции. Чисто аналитическое рассмотрение предела суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых представляет некоторые трудности, выходящие за пределы данного курса, поэтому мы свяжем нахождение этого предела с вычислением площади; каков и был исторический путь развития данного вопроса.

а) Поставим задачу. Найти площадь, ограниченную осью абсцисс (черт. 68) дугою $ST$ кривой $y=f(x)$ и ординатами $AS$ и $BT$, соответствующими абсциссам $x=x_0$ и $x=X$, где $x_0$ и $X$ постоянные числа; причем функция $f(x)$ — однозначная и непрерывная в промежутке от $x_0$ до $X$, т.е. $x_0 \leqslant x \leqslant X$, и значения функции в этом промежутке положительные, так что соответствующая часть кривой лежит выше оси $OX$.

Если соединим точки $S$ и $T$ прямою, то будем иметь трапецию $ASTB$; указанная на чертеже фигура может быть получена из трапеции соединением точек $S$ и $T$ дугою кривой; площадь этой фигуры в данном случае больше площади прямолинейной трапеции (она может быть и меньше площади прямолинейной трапеции и, в частном случае, равна ей).

Искомую величину площади обозначим через $Q$. К решению этой задачи применим способ постепенного приближения ( с ним придется не раз еще встретиться). Так как функция непрерывна, то среди ее значений, в данном промежутке будет наибольшее и наименьшее, которые обозначим через $M$ и $m$; по чертежу ордината




Черт. 68.

$EF$ равна $M$ и ордината $AS=m$. Искомая площадь $Q$ больше площади прямоугольника $ASGB$ и меньше площади прямоугольника $ACDB$. Площади этих прямоугольников, у которых общее основание $AB=X-x_0$ и высоты $m$ и $M$, соответственно равны $m(X-x_0)$ и $M(X-x_0)$; следовательно:

$$m(X-x_0)<Q<M(X-x_0) \qquad (1).$$

Найденные границы слишком грубы(чертеж показывает, что разность между двумя приближениями равна площади прямоугольника $SCDG$ ) и дают возможность составить себе только грубое понятие об искомой площади. Возьмем пример: $y=-x^3+6x^2$; $x_0=2$; $X=5$; вычисления дают: $X-x_0=3$; $m=16$; $M=32$; $48<Q<96$,-истинное значение площади,как потом узнаем, равно:

$$Q=81\tfrac{3}{4}.$$

Конечно, в силу непрерывности функции всегда можно найти такую заключенную между $M$ и $m$ ординату: $M > p > m$, что площадь прямоугольника $P(X-x_0)$ будет равна искомой площади: $Q=P(X-x_0)$. Пусть ордината $P$ соответствует абсциссе $\eta$, где $x_0<\eta<X$, тогда $P=f(\eta)$ и $Q=f(\eta)(X-x_0)$. Число $\eta$ нам совершенно неизвестно; необходимо сделать второе приближение.

$b$) Возьмем теперь промежуточные между $x_0$ и $X$ значения абсцисс:

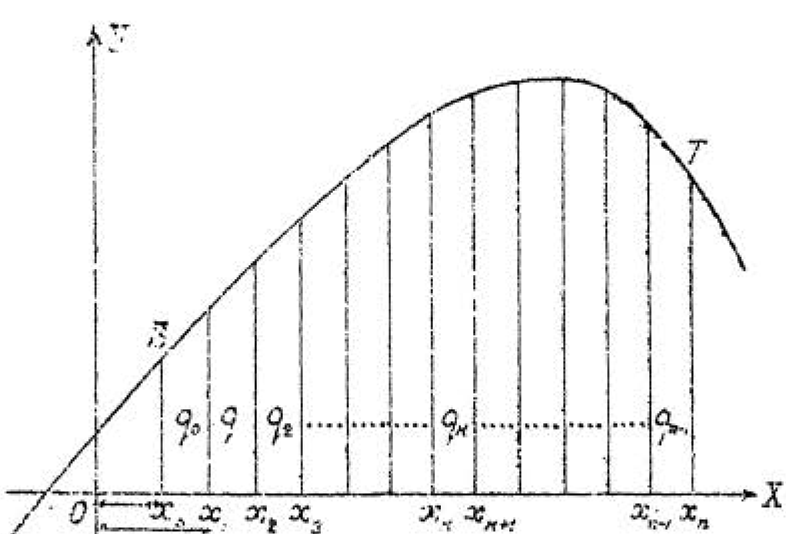
$$x_0<x_1<x_2<x_3 \ldots\ldots <x_k<x_{k+1}\ldots\ldots<x_{n-1}<x_n$$

(для единообразия написали $x_n$ вместо $X$).

Данный отрезок $AB$ (черт. 69) разбился на $n$ частей:

$$x_1-x_0;\ x_2-x_1;\ \ldots\ldots;\ x_{k+1}-x_k;\ \ldots\ldots;\ x_n-x_{n-1};$$

будут ли эти части равными или неравными - безразлично, лишь бы с увеличением числа частей, т.е. с увеличением $n$, каждый промежуток $x_1-x_0$; $x_2-x_1$; $x_3-x_2$ и т.д. стремился к нулю.




Черт. 69.

Если из точек на оси $OX$, абсциссы которых $x_0; x_1; x_2 \ldots\ldots x_n$, восставим перпендикуляры к оси $OX$, то каждый перпендикуляр пересечет кривую только в одной точке, так как $f(x)$ функция однозначная. Искомая площадь разобьется на $n$ полос, площади которых пусть будут:

$$q_0;\ q_1;\ q_2;\ldots\ldots;\ q_k;\ldots\ldots;\ q_{n-1};$$

конечно: $Q = q_0 + q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_k + \ldots\ldots + q_{n-1}$. (2)

Так как функция непрерывна, то среди ее значений в промежутке от $x_0$ до $x_1$ (первый промежуток) найдется свой $maximum$ и $minimum$, т.е. наибольшая и наименьшая ордината первой полоски; обозначив их через $M_0$ и $m_0$, получим, следуя нерав. (I):

$$m_0(x_1 - x_0) < q_0 < M_0(x_1 - x_0),$$

т.е. площадь полоски попрежнему заключаем между площадями двух прямоугольников, имеющих общее основание $x_1 - x_0$ и высоты $m_0$ и $M_0$.

Точно также для площадей следующих по порядку полосок имеем:

$$m_1(x_2 - x_1) < q_1 < M_1(x_2 - x_1);\quad m_2(x_3 - x_2) < q_2 < M_2(x_3 - x_2);\ldots$$

$$\ldots m_k(x_{k+1} - x_k) < q_k < M_k(x_{k+1} - x_k);\ \ldots;\ m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) < q_{n-1} < M_{n-1}(x_n - x_{n-1}).$$

В силу найденных неравенств очевидно: если для каждой полосы возьмем сначала только минимальные значения ординат, а потом максимальные, то, принимая во внимание рав. (2), будем иметь:

$$m_0(x_1 - x_0) + m_1(x_2 - x_1) + \ldots\ldots + m_k(x_{k+1} - x_k) + \ldots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1}) < Q; \quad (3)$$

$$M_0(x_1 - x_0) + M_1(x_2 - x_1) + \ldots\ldots + M_k(x_{k+1} - x_k) + \ldots\ M_{n-1}(x_n - x_{n-1}) > Q; \quad (4)$$

Полагая:

$$x_1-x_0=\Delta x_0;\quad x_2-x_1=\Delta x_1;\ \ldots;\ x_{k+1}-x_k=\Delta x_k;\ \ldots;\ x_n-x_{n-1}=\Delta x_{n-1},$$

неравенства (3) и (4) перепишем так:

$$m_0\Delta x_0+m_1\Delta x_1+\ldots+m_k\Delta x_k+\ldots+m_{n-1}\Delta x_{n-1}<Q; \quad (5)$$

$$M_0\Delta x_0+M_1\Delta x_1+\ldots+M_k\Delta x_k+\ldots+M_{n-1}\Delta x_{n-1}>Q. \quad (6)$$

С безграничным увеличением числа промежутков $\Delta x_0$, $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, ...., $\Delta x_{n-1}$ становятся бесконечно-малыми, минимальные же значения ординат $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ и максимальные $M_0, M_1, M_2 \ldots\ldots M_{n-1}$ остаются конечными величинами; поэтому каждое из слагаемых левой части нерав. (5) и нерав. (6) будет бесконечно-малой величиной (произведение конечной величины на бесконечно-малую); таким образом число слагаемых безгранично растет и каждое слагаемое стремится к нулю, причем первая сумма все время остается меньше $Q$, вторая больше $Q$. Чтобы удобнее было вести дальше исследование, упростим нашу запись: для обозначения первой суммы введем символ $\sum\limits_{k=0}^{k=n-1} m_k\Delta x_k$, который обозначает сумму всех слагаемых, получаемых из слагаемого $m_k\Delta x_k$, если значку $k$ давать последовательно значения: 0,1,2,3 ...... $k$, ......., $n-1$. Символом для второй суммы будет:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k\Delta x_k.$$

Об'единяя вместе неравенства (5) и (6), имеем для искомой площади:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k\Delta x<Q<\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k\Delta x_k. \quad (7)$$

Докажем теперь, что разность между третьим и первым членами нерав.(7) - величина бесконечно-малая:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k\Delta x_k=M_0\Delta x_0+M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\ldots+M_k\Delta x_k+\ldots+M_{n-1}\Delta x_{n-1};$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \Delta x_k = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_k \Delta x_n + \ldots + m_{n-1} \Delta x_{n-1};$$

вычитая из первого равенства второе, находим:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \Delta x_k = (M_0 - m_0)\Delta x_0 + (M_1 - m_1)\Delta x_1 + \ldots + (M_k - m_k)\Delta x_k + \ldots + (M_{n-1} - m_{n-1})\Delta x_{n-1} \quad (8)$$

Заметим, что в полученном равенстве все разности положительные; из разностей $M_0 - m_0; M_1 - m_1; \ldots; M_k - m_k; \ldots; M_{n-1} - m_{n-1}$ выберем наибольшую и обозначим ее через $p$; тогда рав. (8) можно заменить неравенством:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \Delta x_k < p\Delta x_0 + p\Delta x_1 + \ldots + p\Delta x_k + \ldots + p\Delta x_{n-1};$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \Delta x_k \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \Delta x_k < p(\Delta x_0 + \Delta x_1 + \ldots + \Delta x_k + \ldots + \Delta x_{n-1}),$$ или,

так как сумма всех промежутков равна $X - x_0$, то:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \Delta x_k < p(X - x_0). \quad (9)$$

С увеличением числа промежутков каждый из них стремится к нулю (ширина полосок безгранично уменьшается) и вследствие непрерывности функции разность между наибольшей и наименьшей ординатой каждой полоски становится бесконечно-малой, а поэтому и $p$, а следовательно и $p(X - x_0)$, будет бесконечно-малой величиной.

Так как суммы:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \Delta x_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \Delta x_k$$

обе положительные, причем первая больше второй, тогда на основании нерав.(9) разность между ними действительно бесконечно-малая. Величина $Q$, очевидно постоянная; эта величина заключена между двумя вышеуказанными суммами (см. нерав. 7); следовательно:

$$\lim \left\{ \sum_{k=0}^{k=n-1} M_k \Delta x_k \right\}_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} = \lim \left\{ \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k \Delta x_k \right\}_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} = Q. \quad (10)$$

c) Таким образом искомая величина площади $Q$ служит пределом суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых, причем при составлении суммы мы брали для каждой полоски или только максимальную из ее ординат или только минимальную. Докажем теперь, что тот же результат получится, если для каждой полоски возьмем любую из ее ординат. Возьмем на оси $OX$ в промежутке $x_1 - x_0$ (черт. 89) произвольную точку, обозначим через $\xi_0$ ее абсциссу: $x_0 \leq \xi_0 \leq x_1$, — ордината кривой, соответствующая этой абсциссе, будет $f(\xi_0)$; заменим площадь первой полоски площадью прямоугольника:

$$f(\xi) \cdot \Delta x_0;$$

проделаем это для других полосок и составим сумму

$$\sum_{K=0}^{K=n-1} f(\xi_K) \cdot \Delta x_K.$$

Очевидно, вновь полученная сумма, все слагаемые которой положительные, при любом дроблении промежутков заключается между двумя раньше полученными суммами и по известной теореме из теорем пределов должна стремиться к тому же пределу:

$$\lim \left\{ \sum_{K=0}^{K=n-1} f(\xi_K) \Delta x_K \right\}_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_K \to 0}} = Q. \qquad (11)$$

Сделаем запись полностью:

$$\lim \left\{ (x_1 - x_0) f(\xi_0) + (x_2 - x_1) f(\xi_1) + \ldots + (x_{K+1} - x_K) f(\xi_K) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) f(\xi_{n-1}) \right\}_{n \to \infty} = Q \qquad (12)$$

где:

$$x_0 \leq \xi_0 \leq x_1; \quad x_1 \leq \xi_1 \leq x_2$$

и вообще $x_K \leq \xi_K \leq x_{K+1}$; промежуток же $x_n - x_0$ величина конечная.

Рав. (12) показывает, что предел составленной известным образом суммы бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых в общем есть величина конечная.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученная нами формула (11) ограничивается пока только случаем, когда значения функции в интервале ($x_0 X$) положительны и направление отрезков по оси $OX$ в сторону положительных абсцисс; но, если допустить, что число $Q$ может входить со знаком минус, то формула остается справедливой и при отрицательных значениях функции (кривая лежит ниже оси $OX$) при прежнем направлении отрезков по оси $OX$; тогда числа $f(\xi_0)$; $f(\xi_1)$........ $f(\xi_{n-1})$ будут отрицательны, разности $x_1-x_0$; $x_2-x_1$;.... $x_n-x_{n-1}$ — положительны, все слагаемые суммы отрицательны; так как сумма все время остается отрицательною, то и предел ее будет отрицательным. Если функция меняет свой знак в промежутке $(x_0, X)$, то получается алгебраическая сумма площадей, причем площади над осью $OX$ входят со знаком плюс, под осью $OX$ со знаком минус. При положительных значениях функции, но при направлении отрезков в сторону отрицательных абсцисс, число $Q$ входит со знаком минус.

$d$) Рассмотрим теперь частные случаи. Когда высоты прямоугольников равны начальной ординате каждого промежутка, то формула (12) примет вид:

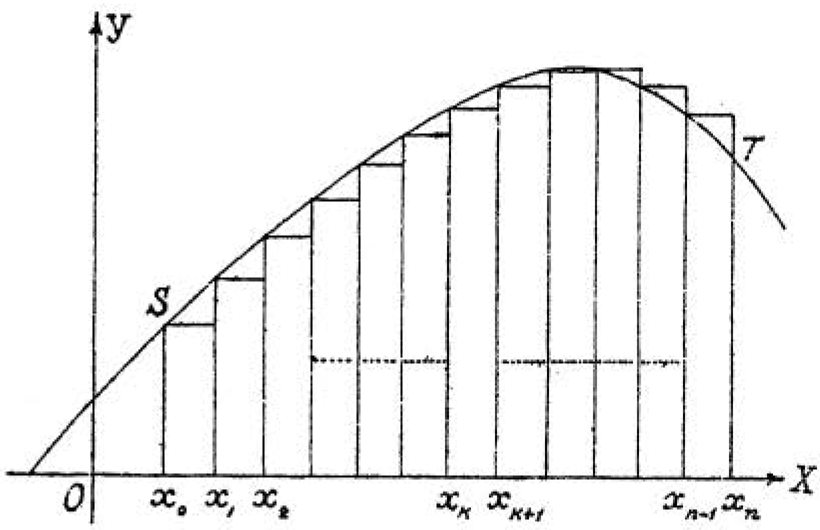
$$\lim\left\{(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(x_{k+1}-x_k)f(x_k)+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(x_{n-1})\right\}=Q. \quad (13)$$

Получается ряд прямоугольников (черт.70), из которых некоторые будут входящими, другие выходящими.

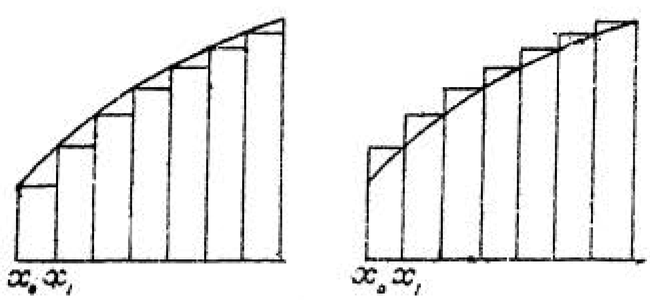
Когда же ординаты проходят через конечные точки промежутков, то формулу (12) можно переписать так:

$$\lim\left\{(x_1-x_0)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+\ldots\ x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1})+\ldots+(x_n-x_{n-1})f(x_n)\right\}=Q. \quad (14)$$

Если функция в промежутке $(x_0, X)$ только возрастает (или убывает), то получается ряд или только входящих или только выходящих прямоугольников (черт. 71).



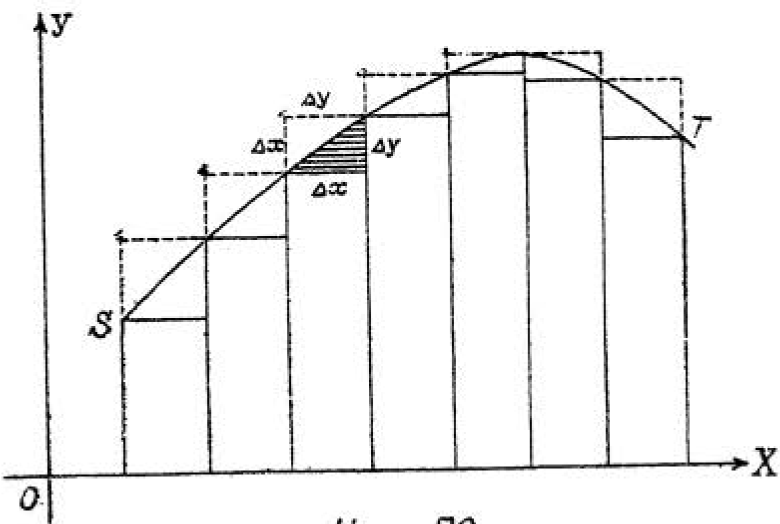

Черт. 70.




Черт. 71.

Так как при составлении суммы мы можем брать любую из ординат каждой полоски, то ничто не мешает выбрать эти ординаты так, чтобы получился ряд только входящих прямоугольников (черт.72); с увеличением числа промежутков, площадь каждого прямоугольника становится величиной бесконечно малой первого порядка относительно $\Delta x$: $(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$ или $\Delta x_k \cdot f(x_k)$. Эти прямоугольники составляют ступенчатую фигуру, площадь которой, будучи величиной конечной и оставаясь постоянно меньше $Q$, стремится к $Q$, как к своему пределу, увеличиваясь. Если бы у нас получилась ступенчатая фигура, составленная только из выходящих прямоугольников, то площадь ее, будучи больше $Q$, стремилась бы к $Q$, уменьшаясь.

Разность между площадями обеих фигур по доказанному - величина бесконечно-малая; эта разность равна сумме площадей бесконечно-малых прямоугольников (см.черт.), площадь каждого из которых, равная $\Delta x . \Delta y$, будет




Черт. 72.

бесконечно-малою не ниже второго порядка относительно $\Delta x$; то же замечание относится и к криволинейным треугольникам (один из них заштрихован).

*e*) Вопрос о нахождении предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых находит себе применение во многих вопросах науки и техники, между тем все предыдущие рассуждения тесно связаны с геометрическим образом, площадью криволинейной трапеции. Но мы всегда сможем оторваться от геометрического образа. Пусть дана $f(x)$, непрерывная и однозначная в промежутке $(x_o ; X)$. Разделим данный промежуток $X - x_o$ на $n$ частичных промежутков:

$$x_1 - x_o ; \quad x_2 - x_1 ; \ldots ; \quad x_{k+1} - x_k ; \ldots\ldots ; x_n - x_{n-1} .$$

Возьмем в каждом промежутке произвольное число:

$$x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant x_1;\quad x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_2; \ldots\ldots x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}; \ldots\ldots x_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} \leqslant x_n;$$

и составим следующую сумму:

$$(x_1-x_0)f(\xi_0)+(x_2-x_1)f(\xi_1)+\ldots\ldots+(x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)+\ldots+(x_{n-1}-x_n)f(\xi_{n-1}).$$

Если число промежутков безгранично растет, причем каждый промежуток становится величиной бесконечно малой, то полученная сумма будет стремиться к пределу, который не зависит ни от выбора чисел $\xi$, ни от способа дробления промежутков. Аналитическое доказательство существования предела выходит за границы нашего курса.

С диалектической точки зрения проделываемая нами операция построена по закону двойного отрицания.

Разбивая целое на бесконечное множество частей и сосредоточивая на них наше внимание, мы производим отрицание единого; затем путем суммирования и отыскания предела снова возвращаемся к целому.

Вышеуказанная операция называется интегрированием (от слова собираю); предел суммы называется определенным интегралом (дальше будут указаны мотивы такого названия) данной функции $f(x)$ в границах от $x_0$ до $X$ и обозначается символом $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$; таким образом:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim \left[\sum_{k=0}^{k=n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\right]_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}} \qquad (15).$$

2. Практические задачи. Познакомимся теперь на практических задачах с нахождением предела суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

Вычислим сначала путем суммирования два определенных интеграла, которые нам понадобятся при решении задач

1) $\int_0^x ax\,dx.$

Здесь нижняя граница $x_0=0$. Разделим данный промежуток на $n$ равных частей:

$$\frac{X-x_0}{n}=\frac{X}{n}.$$

Вычисление будем вести по формуле (15), положив

$$\xi_k=x_k.$$

Так как частичные промежутки равны, то:

$$\Delta x_0=\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=\ldots\ldots\ldots=\Delta x_{n-1}=\frac{X}{n}.$$

Найдем значения аргумента:

$$x_0=0;\quad x_1=x_0+\Delta x_0=\frac{X}{n};\quad x_2=x_1+\Delta x_1=\frac{X}{n}+\frac{X}{n}=\frac{2X}{n};\quad x_3=\frac{3X}{n};\ldots;x_{n-1}=\frac{(n-1)X}{n}$$

Подынтегральная функция $f(x)=ax$, поэтому вместо суммы:

$$f(x_0)\Delta x_0+f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+f(x_3)\Delta x_3+\ldots+f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$$

получим:

$$a\cdot\frac{X}{n}\cdot\frac{X}{n}+a\cdot\frac{2X}{n}\cdot\frac{X}{n}+a\cdot\frac{3X}{n}\cdot\frac{X}{n}+\ldots\ldots+a\cdot\frac{(n-1)X}{n}\cdot\frac{X}{n},$$

или:

$$a\cdot\frac{X}{n}\cdot\frac{X}{n}\left[1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)\right].$$

В скобках стоит сумма членов арифметической прогрессии:

$$1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$, следовательно:

$$\int_0^X ax\,dx=\lim\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}ax_k\Delta x_k\right]_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}=\lim\left[a\cdot\frac{X^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right]_{n\to\infty}$$

Теперь интеграл найдется легко:

$$\int_0^X ax\,dx=\frac{aX^2}{2}\lim\left[\frac{n-1}{n}\right]_{n\to\infty}=\frac{aX^2}{2}\lim\left[1-\frac{1}{n}\right]_{n\to\infty}=\frac{aX^2}{2}.$$

2) $\int_0^X ax^2 dx.$

Здесь под'интегральная функция $f(x)=ax^2$; поступая точно также, как и при вычислении первого интеграла получим сумму

$$a\left(\frac{X}{n}\right)^2\cdot\frac{X}{n}+a\left(\frac{2X}{n}\right)^2\cdot\frac{X}{n}+a\left(\frac{3X}{n}\right)^2\cdot\frac{X}{n}+\ldots+a\left(\frac{(n-1)X}{n}\right)^2\cdot\frac{X}{n},-$$

или: $$a\cdot\frac{X^3}{n^3}\left[1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots(n-1)^2\right] \qquad (1).$$

Остается найти сумму квадратов чисел натурального ряда; обозначим ее через $S$.

Из элементарной алгебры знаем:

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

Подставляя в эту формулу вместо $n$ последовательно: 1,2,3;...; $n-1$, будем иметь следующий ряд равенств:

$$2^3-1^3=3.1^2+3.1+1$$
$$3^3-2^3=3.2^2+3.2+1$$
$$4^3-3^3=3.3^2+3.3+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1.$$

Складывая эти равенства, найдем:

$$n^3-1^3=3\left[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right]+3\left[1+2+3+\ldots+(n-1)\right]+1.(n-1),-$$

или: $$n^3-1^3=3S+\frac{3n(n-1)}{2}+1.(n-1);$$

отсюда после преобразований получим:

$$S=1^2+2^2+3^2+\ldots(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

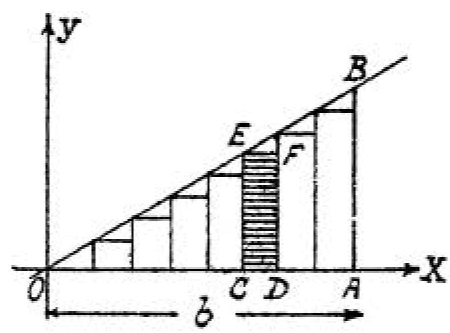
Вставляя полученный результат в рав. (I), имеем:

$$\int_0^X ax^2dx=\lim\left[a\cdot\frac{X^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]_{n\to\infty}=\frac{aX}{6}\lim\left[\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\right]_{n\to\infty};$$

$$\int_0^X ax^2dx=\frac{aX^3}{6}\lim\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]_{n\to\infty}=\frac{aX^3}{3}.$$

Задача I. Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $y=ax$, осью $OX$ и ординатой, соответствующей абсциссе $b$; если $a>0$ и $b>0$.

Эта задача просто решается элементарным путем и здесь приводится только для выяснения метода суммирования бесконечно малых.




Черт.73.

Предположим, что отрезок $OA$ равен $b$ (черт.73). Границами интегрирования будут:

$$x_0=0\ ; \qquad X=b.$$

Разделим отрезок $OA$ на $n$ равных частей:

$$\frac{OA}{n}=\frac{b}{n}=\Delta x$$

и построим входящие прямоугольники. Возьмем один из них: $CDEF$; основание его $CD=\Delta x$. Пусть абсцисса $OC=x_k$, тогда (по уравнению прямой $y=ax$) ордината $CE=ax_k$. Площадь прямоугольника $CDEF$ равна $ax_k.\Delta x$.

Подставляя вместо $k$ последовательно числа от $0$ до $n-1$, получим для площади ступенчатой фигуры:

$$ax_0\Delta x+ax_1\Delta x+ax_2\Delta x+\ldots+ax_k\Delta x+\ldots+ax_{n-1}\Delta x=\sum_{k=0}^{k=n-1}ax_k\Delta x.$$

Обозначая площадь треугольника через $Q$ и переходя к пределу, имеем:

$$Q=\lim\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}ax_k\Delta x\right]_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}=\int_0^b ax\,dx.$$

Последний интеграл нам уже известен, нужно только в полученной для него формуле подставить $b$ вместо $X$:

$$Q=\frac{ab^2}{2}.$$

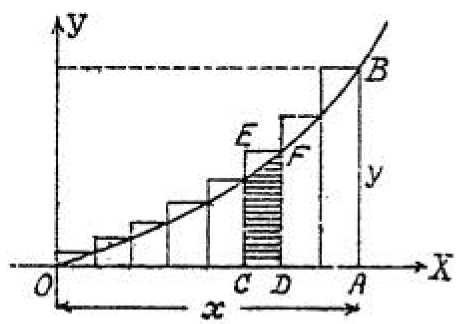
Элементарным путем найдем: $Q=\frac{OA\cdot AB}{2}$; но $OA=b$ и (по уравнению прямой) $AB=ab$; тогда:

$$Q=\frac{b\cdot ab}{2}=\frac{ab^2}{2}.$$

Результат получается тот же.

<u>Задача 2.</u> Найти площадь, ограниченную дугою параболы $y=ax^2$, где $a>0$, осью $OX$ и ординатой, соответствующей абсциссе $x$, причем $x>0$.

Из аналитической геометрии должно быть известно, что парабола в данном случае проходит через начало координат, обращена вогнутостью вверх (черт. 74) и ось симметрии ее совпадает с осью $OY$. Границами интегрирования будут: $O$ и $x$, причем $x$ может получать по условии задачи любые положительные значения. Предположим, что отрезок $OA=x$; разделим этот отрезок на $n$ равных частей и построим выходящие прямоугольники (можно построить и входящие: это на основании изложенного в пункте I безразлично). Возьмем один из них: $CDEF$; основание его $CD=\Delta x$. Пусть отрезок $OC=x_k$, тогда абсцисса $OD=x_{k+1}$; для ординаты $DF$ (по уравнению кривой) найдем: $DF=ax_{k+1}^2$. Для площади прямоугольника $CDEF$ имеем: $ax_{k+1}^2\cdot\Delta x$. Площадь ступенчатой фигуры будет равна:




Черт. 74.

$$ax_1^2\Delta x+ax_2^2\Delta x+ax_3^2\Delta x+\dots+ax_{k+1}^2\Delta x+\dots+ax_n^2\Delta x=\sum_{k=0}ax_{k+1}^2\Delta x.$$

Обозначим искомую площадь через $Q$ и перейдем к пределу:

$$Q=\lim\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} a x_{k+1}^2 \Delta x\right]_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x\to 0}}=\int_0^x a x^2 dx.$$

Подставляя в формуле найденной для этого интеграла $x$ вместо $X$, получим окончательно $Q=\frac{ax^3}{3}$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула, найденная для искомой площади, показывает, что при отрицательном $x$, т.е. при отсчете отрезков от точки $O$ в сторону отрицательных абсцисс, число измеряющее площадь входит со знаком минус. Если $a<0$, то парабола расположена под осью $OX$ и при $x>0$ число измеряющее площадь будет также входить со знаком минус; при $a<0$ и $x<0$ снова получается знак плюс, число измеряющее площадь дважды меняет знак.

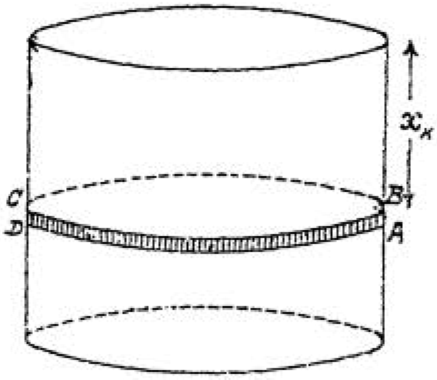
Задача 3. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую цилиндрический резервуар с радиусом $R$ и высотою $H$, если $R=3$ м и $H=5$ м.

Величина работы, затраченной на поднятие тела, равна произведению веса тела на высоту его поднятия: так, если тело весом в 5 кг поднято на высоту 3 м, то затрачено 15 килограммометров работы.

Разделим высоту цилиндра на $n$ равных частей и обозначим каждую часть через $\Delta x$, тогда цилиндр (черт. 75), если через точки деления проведем горизонтальные плоскости, разобьется на $n$ цилиндрических слоев. Так как площадь основания каждого слоя равна $\pi R^2$ и высота $\Delta x$, то об'ем будет $\pi R^2 \cdot \Delta x$ и вес $p \cdot \pi R^2 \Delta x$, где $p$ вес 1 куб. ед. Возьмем один из слоев: $ABCD$; предположим, что все частицы его находятся на одном и том же расстоянии $x_k$ от верхнего основания цилиндра, тогда для поднятия этого слоя необходимо затратить работу: $p\pi R^2 \Delta x . x_k$ или $\pi p R^2 x_k . \Delta x$. Подставляя вместо $k$ последовательно числа: $1, 2, 3, \dots, k, \dots n$, получим следующую приближенную формулу работы, которую надо затратить для поднятия всех слоев до верхнего основания цилиндра:

$$\pi p R^2 x_1 . \Delta x + \pi p R^2 x_2 \Delta x + \dots + \pi p R^2 x_k \Delta x + \dots \pi p R^2 x_n \Delta x = \sum_{k=1}^{k=n} \pi p R^2 x_k \Delta x.$$

Начнем увеличивать число слоев, причем толщина каждого слоя будет уменьшаться, а перейдем к пределу, обозначив искомую величину работы через $U$ и положив $\pi p R^2 = a$:




Черт. 75.

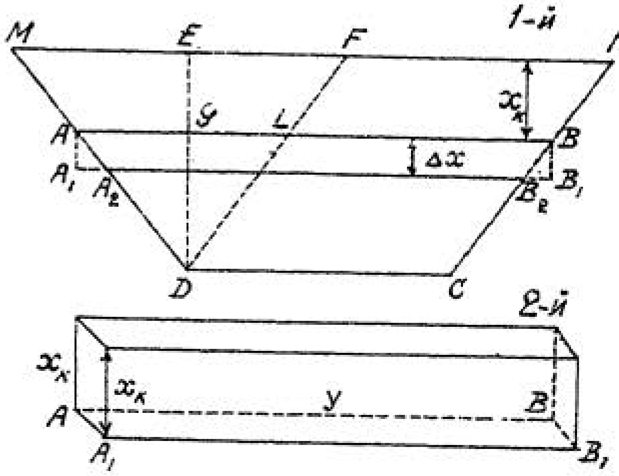
$$U = \lim \left[ \sum_{k=1}^{k=n} a x_k \Delta x \right]_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x \to 0}} = \int_0^H a x \, dx.$$

Так как интеграл нами уже вычислен, то подставляя в полученную для него формулу $H$ вместо $X$ и $\pi p R^2$ вместо $a$ окончательно найдем:

$$U = \frac{1}{2} \pi p R^2 H^2.$$

Вес 1 куб. метра воды равен 1000 кг, вычисления дают $U =$ 353428 км/м работы.

<u>Задача 4.</u> Вертикальная плотина имеет форму трапеции, длина верхнего основания которой $b$ м, нижнего $c$ м, а высота равна $h$ м. Найти давления воды на плотину. $b = 70$ м; $c = 50$ м; $h = 20$ м. Разделим высоту $h$ трапеции (черт. 76, I) на $n$ равных частей, обозначив каждую часть через $\Delta x$; параллельными




Черт. 76.

прямыми, проведенными через точки деления, разобьем трапецию на $n$ полосок в виде узких трапеций (черт.76,I), каждую из которых заменим выходящим прямоугольником. Построим такие прямоугольники и возьмем один из них $ABB_1A_1$; высота его $\Delta x$; пусть расстояние верхнего основания $AB$ этого прямоугольника от верхнего основания $MN$ трапеции равно $x_к$. Выразим длину стороны $AB$ как функцию $x_к$; проведем для этого прямую $DF$ параллельно стороне $CN$ и обозначим длины отрезков $AB$ и $AL$ соответственно через $y$ и $z$; так как $DC=LB=FN=c$, то $y=z+c$. Из подобия треугольников $ADL$ и $MDF$ имеем:

$$\frac{AL}{MF}=\frac{DG}{DE}; \quad \frac{AL}{MN-FN}=\frac{DE-EG}{DE}; \quad \text{или} \quad \frac{z}{b-c}=\frac{h-x_к}{h};$$

отсюда получим:

$$z=b-c-\frac{b-c}{h}x_к;$$

следовательно:

$$y=b-\frac{b-c}{h}\cdot x_к.$$

Теперь площадь прямоугольника $ABB_1A_1$ нам будет известна:

$$b\cdot\Delta x-\frac{b-c}{h}x_k\cdot\Delta x.$$

По законам физики давление воды на полоску $ABB_2A_2$, имеющую форму трапеции, приблизительно равно весу столба воды (черт.76,2), в основании которого прямоугольник $ABB_1A_1$ и высота которого равна $x_k$; об'ем его в куб. метрах:

$$\left(b\cdot\Delta x-\frac{b-c}{h}x_k\Delta x\right)\cdot x_k;$$

так как вес I куб.м воды равен I т, то то же выражение будет служить и для веса столба в тоннах; после упрощения:

$$bx_k\Delta x-\frac{b-c}{h}x_k^2\Delta x.$$

Подставляя вместо $k$ последовательно числа: I,2,3....$k$,.... найдем следующую приближенную формулу для давления воды на плотину:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\left(bx_k\Delta x-\frac{b-c}{h}x_k^2\Delta x\right);$$

или, разбивая сумму на два слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{k=n}bx_k\Delta x-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{b-c}{h}x_k^2\Delta x.$$

Обозначая искомое давление через $P$ и переходя к пределу, имеем:

$$P=\int_0^h bx\,dx-\int_0^h\frac{b-c}{h}x^2dx;$$

после интегрирования:

$$P=\frac{1}{2}bh^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{b-c}{h}\cdot h^3;$$

упрощая, получим окончательно:

$$P = \frac{(b+2c)h^2}{6} \text{ в тоннах} \qquad (1).$$

Если плотина имеет форму прямоугольника, то тогда $c = b$:

$$P = \frac{b \cdot h^2}{2}. \qquad (2)$$

Желая вычислить давление воды на подпорную стенку в форме треугольника, вершина которого на поверхности воды, а высота расположена вертикально, надлежит в рав. (I) положить $b = 0$:

$$P = \frac{1}{3} c h^2 \qquad (3)$$

При $b = 70$ м, $c = 50$ м, $h = 20$ м по рав. (I) имеем:

$$P = 11333\tfrac{1}{3} \text{ тонн.}$$

## §28. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА И СВЯЗЬ ЕГО С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ.

I. Основные свойства. Предыдущие практические задачи показали всю плодотворность принципа дробления целого на бесконечно малые части, но непосредственное вычисление определенного интеграла, как предела суммы, представляет очень трудную задачу: даже при вычислении определенных интегралов от таких простых функций, как $ax$ и $ax^2$, приходилось прибегать к искусственным приемам, число которых должно расти с увеличением числа функций; в нашем распоряжении пока нет никакого аппарата для суммирования бесконечно малых. В таком положении был этот вопрос, пока вместо суммы искусственных приемов не был введен более общий метод (во время Ньютона и Лейбница) и вычисление определенного интеграла не удалось свести к нахождению первообразной функции, а для этого необходимо изучить сначала основные свойства определенного интеграла, исходя из его определения, т.е. положив в основу формулу 15 (см. стр. 100).

Запишем эту формулу полностью:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left[(x_1-x_0)f(\xi_0)+(x_2-x_1)f(\xi_1)+\ldots+(x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)+\ldots+(X-x_{n-1})f(\xi_{n-1})\right]_{n\to\infty} \quad (15)$$

**1) Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования.**

Сумма в формуле (15) составлена совершенно независимо от переменной $x$: $X$ и $x_0$ постоянные величины от $x$ независящие, тоже относится и к частичным промежуткам - результату дробления промежутка $X-x_0$; числа $\xi$ взяты совершенно произвольно в границах каждого промежутка; таким образом, каково бы ни было обозначение переменной, в пределе получится одно и то же число, зависящее только от характера функции и границ:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(t)\,dt. \qquad (16)$$

При вычислении интегралов на стр. 101 и 102 переменная $x$ во внимание не принималась и независимо от $x$ было получено:

$$\int_0^X a x^2\,dx = \frac{1}{3} a X^3;$$

следовательно:

$$\int_0^2 3X^2\,dx = \int_0^2 3t^2\,dt = \int_0^2 3p^2\,dp = 8.$$

2) Определенный интеграл с равными границами равен нулю:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = 0. \qquad (17)$$

Если $X = x_0$, то $X - x_0 = 0$ и $\frac{X - x_0}{n} = 0$, следовательно и частичные промежутки $x_1 - x_0$; $x_2 - x_1, \ldots; x_{k+1} - x_k; \ldots\ldots$ $\ldots; x_n - x_{n-1}$ равны нулю; все слагаемые (см.форм. 15) равны нулю, поэтому и сумма и ее предел равны нулю. С геометрической точки зрения начальная и конечная ординаты совпадают и вместо площади получается отрезок прямой.

3) Если $X > x_0$, то интеграл будет положительным числом, когда $f(x) > 0$ в данном промежутке, и отрицательным в обратном случае.

Так как $f(x) > 0$, то $f(\xi_0), f(\xi_1), f(\xi_2) \ldots f(\xi_{n-1})$ будут положительными числами; но $X > x_0$, поэтому $X - x_0 > 0$ и $\frac{X - x_0}{n} > 0$ и все мелкие промежутки: $x_1 - x_0 > 0$; $x_2 - x_1 > 0; \ldots, X - x_{n-1} > 0$, следовательно, все слагаемые, их сумма и предел этой суммы положительны. Легко показать, что при $X > x_0$ и $f(x) < 0$ интеграл будет отрицательным числом.

4) При перестановке границ интеграл меняет знак, не меняя численного значения.

Возьмем интеграл $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ и переставим границы $\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx$.

Пусть $X > x_0$ и $f(x) > 0$, тогда по выше доказанному первый интеграл больше нуля. При вычислении второго интеграла $f(\xi_0)$; $f(\xi_1); \ldots; f(\xi_{n-1})$ остаются попрежнему положительными, но составленные из значений переменного $x_0; x_1; x_2; \ldots; x_{n-2}; x_{n-1}; X$, промежутки $x_{n-1} - X$; $x_{n-2} - x_{n-1}; \ldots; x_1 - x_2$; $x_0 - x_1$ (счет промежутков всегда идет от нижней границы к верхней) теперь уже меньше нуля, следовательно все слагаемые второй суммы отрицательны, а потому и второй интеграл будет отрицателен:

$$\int_X^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^X f(x)\,dx \qquad (18)$$

Тоже самое равенство имеет место и при $f(x)<0$.

При помощи доказанной теоремы можно рассмотреть свойство 3) для случая, когда $X<x_0$.

5) Данный интеграл можно представить в виде суммы интегралов от той же самой функции

$$\int_{x_0}^X f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{k-1}}^{X} f(x)\,dx. \qquad (19)$$

Нанесем на ось $OX$ точки, абсциссы которых равны: $x_0;\ x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_{k-1};\ X$, предположив сначала, что точки расположены последовательно в ряд, т.е. лежат в одном и том же промежутке: $x_0<x_1<x_2\ldots<x_{k-1}<X$, и закрепим их. Разделим каждый из $k$ промежутков: $x_1-x_0$; $x_2-x_1;\ \ldots;\ X-x_{k-1}$ на $n$ частичных промежутков, тогда сумма в формуле (15) разобьется на $k$ сумм; начнем увеличивать число промежутков каждой суммы; первая сумма будет стремиться к пределу: $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$; вторая к пределу: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ и последняя к пределу: $\int_{x_{k-1}}^{X} f(x)\,dx$, — и наша теорема доказана для случая $x_0<x_1<x_2\ldots<x_{k-1}<X$: интеграл на всем промежутке равен сумме интегралов на его частях.

Пусть теперь число $x_1$ лежит вне данного промежутка $(x_0 X)$; здесь возможны два случая: $x_1<x_0$ и $x_1>X$; рассмотрим сначала первый случай: $x_1<x_0$; принимая во внимание, что $x_0<X$, будем иметь неравенства:

$$x_1<x_0<X.$$

Так как $x_0$ лежит внутри промежутка $(x_1 X)$, то по предыдущему имеем:

$$\int_{x_1}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

отсюда:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{X} f(x)\,dx;$$

переставив границы первого интеграла правой части (от чего знак интеграла изменится), найдем:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{X} f(x)\,dx;$$

тот же самый результат получится и при $x_1 > X$.

Разбивая каждый из двух последних интегралов снова на два слагаемых и т.д., придем к доказательству справедливости формулы (19), какие бы ни были числа: $x_0$; $x_1$; $x_2$; ... $x_{k-1}$; $X$, если только $f(x)$ непрерывна в промежутке между наименьшим и наибольшим из этих чисел.

6) <u>Постоянного множителя можно выносить за знак определенного интеграла и вносить под знак интеграла.</u>

Если в формуле (15) вместо $f(x)$; $f(\xi_0)$; $f(\xi_1)$; ...; $f(\xi_{n-1})$ подставим $af(x)$; $af(\xi_0)$; $af(\xi_1)$; ...; $af(\xi_{n-1})$ и возьмем общего множителя $a$ сначала за знак суммы, а потом за знак предела, то получим:

$$\int_{x_0}^{X} af(x)\,dx = a\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx. \qquad (20)$$

7) <u>Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме определенных интегралов от слагаемых.</u>

Подставим в формулу (15) вместо $f(x)$; $f(\xi_0)$; $f(\xi_1)$; ...; $f(\xi_{n-1})$ последовательно:

$$f_1(x)+f_2(x)-f_3(x); \qquad f_1(\xi_0)+f_2(\xi_0)-f_3(\xi_0);$$

$$f_1(\xi_1)+f_2(\xi_1)-f_3(\xi_1); \ldots; f_1(\xi_{n-1})+f_2(\xi_{n-1})-f_3(\xi_{n-1}).$$

Правая часть формулы разобьется на три суммы; переходя к пределу, получим:

$$\int_{x_0}^{X}[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]dx=\int_{x_0}^{X}f_1(x)dx+\int_{x_0}^{X}f_2(x)dx-\int_{x_0}^{X}f_3(x)dx. \quad (21$$

8) Из двух интегралов $\int_{x_0}^{X}f_1(x)dx$ и $\int_{x_0}^{X}f_2(x)dx$, имеющих одни и те же границы, причём $X>x_0$ первый будет больше второго, если $f_1(x)>f_2(x)$ во всем промежутке $(x_0;X)$.

Так как $f_1(x)>f_2(x)$, то: $f_1(x)-f_2(x)>0$; поэтому на основании свойства 3 имеем: $\int_{x_0}^{X}[f_1(x)-f_2(x)]dx>0$, или: $\int_{x_0}^{X}f_1(x)dx-\int_{x_0}^{X}f_2(x)dx>0$, – и окончательно:

$$\int_{x_0}^{X}f_1(x)dx>\int_{x_0}^{X}f_2(x)dx. \quad (22)$$

Теорема сохраняет свою силу, если в общем $f_1(x)>f_2(x)$, но при отдельных значениях $x$ возможны случаи $f_1(x)=f_2(x)$; если же во всем промежутке $(x_0;X)$ имеет место равенство $f_1(x)=f_2(x)$, то по формуле (15) мы получим две равные суммы, но тогда и интегралы равны. Легко доказать, что первый интеграл будет меньше второго при $X<x_0$, если попрежнему $f_1(x)>f_2(x)$.

9) Теорема о среднем значении. Если функция $\varphi(x)$ во всем промежутке $(x_0;X)$ сохраняет знак, то $\int_{x_0}^{X}f(x)\varphi(x)dx$ можно представить произведением интеграла $\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx$ на некоторое среднее значение $f(x$ т.е:

$$\int_{x_0}^{X}f(x)\varphi(x)dx=f(\xi)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx, \text{ где } x_0<\xi<X. \quad (23).$$

Само собой разумеется, что функции непрерывны в промежутке $(x_0;X)$.

Обозначим через $m$ и $M$ наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $(x_0;X)$, тогда:

$$m\leq f(x)\leq M;$$

равенство не может иметь места для всех значений $x$, если только функция не равна постоянной (поэтому этот случай следует исключить).

Предположим сначала, что функция $\varphi(x)$ во всем промежутке положительна (по условию теоремы она сохраняет знак), тогда:

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x).$$

На основании свойства 8) имеем:

$$\int_{x_0}^{X} m\varphi(x)dx < \int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)dx < M\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx,$$

или:

$$m\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx < \int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)dx < M\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx.$$

Функция $f(x)$ в силу своей непрерывности всегда может получить такое промежуточное между $m$ и $M$ значение:

$$m < f(\xi) < M,$$

что предыдущее неравенство можно заменить равенством:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx, \text{ где } x_0 < \xi < X.$$

Предоставляем читателям самим расмотреть случай, когда $\varphi(x) < 0$.

Если $\varphi(x) = 1$, то формула (23) примет вид:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = f(\xi)\int_{x_0}^{X}dx;$$

очевидно, $\int_{x_0}^{X}dx$ есть сумма всех промежутков, которая равна: $X - x_0$; следовательно:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = f(\xi)\cdot(X - x_0). \qquad (24)$$

Геометрическое толкование последней формулы дано на стр. 91.

## 2. Связь определенного интеграла с неопределенным интегралом.

а) Определенный интеграл, как функция верхней границы. В формуле (15), из которой мы все время исходили, нижняя и верхняя границы рассматриваются, как числа постоянные; в геометрической трактовке абсциссам $x_0$ и $X$ соответствуют начальная и конечная неподвижные ординаты, ограничивающие площадь. Считая попрежнему $x_0$ числом постоянным, начнем изменять величину $X$ (делаем ее переменной независимой), тогда конечная ордината станет также придвигаться или отодвигаться по отношению к начальной ординате. Величина площади, определяемая интегралом, будет изменяться; следовательно, определенный интеграл есть функция верхней границы; обозначим ее через $\Phi(x)$, причем мы для удобства написали $x$ вместо $X$; но той же буквой обозначена переменная под'интегральной функции $f(x)$; эта переменная в состав суммы формулы (15), а следовательно и в состав определенного интеграла не входит (см. свойство I); чтобы иметь это в виду, запишем $f(t)$ вместо $f(x)$.

Итак имеем:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \Phi(x).$$

Докажем, что $\Phi(x)$ непрерывна; дадим независимой переменной приращение $\Delta x$ тогда:

$$\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Phi(x+\Delta x).$$

Вычитаем из второго равенства первое:

$$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Первый интеграл правой части преобразуем по формуле (19)

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,$$

или:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Применяем теорему о среднем ( см.форм. 24) к полученному интегралу:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\Delta x.f(\xi).$$

Число $\xi$ заключено между $x+\Delta x$ и $x$; оно, так сказать, равно $x$ плюс часть $\Delta x$, т.е. $\xi=x+\theta\Delta x$, где $0<\theta<1$, поэтому:

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\Delta x.f(x+\theta\Delta x).$$

Левая часть этого равенства—приращение функции, которое будет бесконечно-малою, так как правая часть того же равенства - произведение бесконечно малой величины $\Delta x$ на конечную $f(x+\theta\Delta x)$ (значение подинтегральной функции $f(x+\theta\Delta x)$ в силу ее непрерывности конечно). Если же бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то функция непрерывна.

Итак определенный интеграл есть непрерывная функция своей верхней границы.

Разделим обе части предыдущего равенства на $\Delta x$:

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x+\theta\Delta x);$$

переходя к пределу, получим:

$$\Phi'(x)=f(x);$$

но $\varphi(x)$ есть только обозначение определенного интеграла, поэтому:

$$\left[\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right]'_x = f(x), \text{ или } \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x) \qquad (25).$$

Производная от определенного интеграла по верхней границе равна значению под'интегральной функции для этой верхней границы.

Пусть теперь верхняя граница $x$ постоянное число, а нижняя $x_0$ переменная; найдем производную по нижней границе, для этого надо переставить границы:

$$\frac{d}{dx_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = -\frac{d}{dx_0}\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt = -f(x_0),$$

или:

$$\frac{d}{dx_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = -f(x_0) \qquad (26).$$

Если обе границы постоянные - обозначим их через $a$ и $b$, то определенный интеграл будет числом и производная его равна нулю:

$$\left[\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right]' = 0 \qquad (27).$$

Так как определенный интеграл в геометрическом рассмотрении есть площадь криволинейной трапеции, то легко найти производную и дифференциал этой площади. Обозначив площадь через $Q$, имеем:

$$Q = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt;$$

отсюда:

$$\frac{dQ}{dx} = f(x); \qquad \frac{dQ}{dx} = y; \qquad (28)$$

$$dQ = f(x)dx; \qquad dQ = y\,dx.$$

б) Связь определенного интеграла с неопределенным интегралом. Формула (25) показывает, что вычисление определенного интеграла можно свести к отысканию первообразной функции. Действительно: пусть неопределенный интеграл от функции $f(x)$ будет: $\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C$, а определенный в границах $x_0$ и $x$: $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \varphi_1(x)$.

Возьмем производные от обоих интегралов:

$$\varphi'(x) = f(x); \qquad \varphi_1'(x) = f(x).$$

Так как производная одна и та же, то функции $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ отличаются постоянной величиной; определенный интеграл равен одному из значений неопределенного. Пусть требуется найти интеграл:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt;$$

найдем сначала неопределенный интеграл:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

тогда:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \varphi(x) + C. \qquad (\text{рав.}1)$$

Так как полученное равенство справедливо только при вполне определенном значении $C$, то легко найти постоянную интегрирования, дадим в рав. (I) $x$ частное значение $x_0$:

$$\int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = \varphi(x_0) + C;$$

но интеграл с равными границами равен нулю, поэтому:

$$0 = \varphi(x_0) + C; \qquad C = -\varphi(x_0),$$

и равенство (I) получит вид:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Если вернемся к интегралу $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, из которого исходили, то будем иметь:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \varphi(X) - \varphi(x_0).$$

Полагая $x=b$ и $x_0=a$ и применяя к правой части равенства общепринятую сокращенную запись, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\varphi(x)\Big]_a^b \qquad (29).$$

Определенный интеграл равен разности значений неопределенного при верхней и нижней границе.

Так как произвольная постоянная при вычитании выпадает, то в формуле (29) вместо $\varphi(x)+C$ мы написали просто $\varphi(x)$.

Таким образом вместо утомительного непосредственного вычисления интеграла, как предела суммы, эту операцию возможно, как было уже упомянуто, свести к нахождению первообразной функции. Теперь в нашем распоряжении весь аппарат интегрирования функций. Пользуясь особенностями определенного интеграла, можно в методы интегрирования функций внести упрощения, о чем будет сказано в следующем параграфе.

Для примера найдем те два интеграла, вычисления которых непосредственным суммированием оказалось затруднительным:

$$1)\ \int_0^X ax\,dx=a\int_0^X x\,dx=a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^X=\frac{aX^2}{2};$$

$$2)\ \int_0^X ax\,dx=a\int_0^X x^2\,dx=a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^X=\frac{aX^3}{3}.$$

Возьмем еще пример: $\int_a^b \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_a^b=\cos a-\cos b.$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в формуле (29) положить $b=x$ и $a=C$, где $C$ произвольная постоянная величина, то неопределенный интеграл можно записать в виде определенного интеграла:

$$\int f(x)\,dx=\int_C^x f(x)\,dx=\varphi(x)-\varphi(C) \qquad (30).$$

Здесь $\varphi(C)$ произвольная постоянная. При таком способе записи неопределенный интеграл может и не заключать в себе всех первообразных функций, действительно:

$$\int\sqrt{x}.dx=\int_{c}^{x}\sqrt{x}.dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{c}^{x}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}C^{\frac{3}{2}};$$

так как всегда $C>0$ (во избежание мнимости), то $(-\frac{2}{3}C^{\frac{3}{2}})$ будет постоянно меньше нуля, между тем в формуле $\int\sqrt{x}.dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$ произвольная постоянная $C$ может быть каким-угодно числом.

c) Практические задачи.

I) Практические задачи будут относиться главным образом к вычислению площадей. Сделаем несколько замечаний по этому вопросу:

Для площади, ограниченной дугою кривой $y=f(x)$, осью $OX$ и ординатами, соответствующими абсциссам $x_0$ и $X$, где $x_0<X$, была дана формула:

$$Q=\int_{x_0}^{X}f(x)dx; \qquad Q=\int_{x_0}^{X}ydx. \qquad (31)$$

Причем меньшая абсцисса считается нижней границей, чтобы отсчет площади был направлен в сторону положительных абсцисс; тогда для площади, при расположении кривой выше оси $OX$, получается положительное число; ниже - отрицательное.

Если кривая расположена по разные стороны оси $OX$, то вычисление площади ведется по частям (как увидим при решении практических задач). В случае, когда оси координат разбивают площадь на равные части, вычисляется площадь одной части и умножается на число частей. Если кривая имеет ось симметрии, то вычисление ведется для части площади, расположенной по одну сторону оси симметрии.

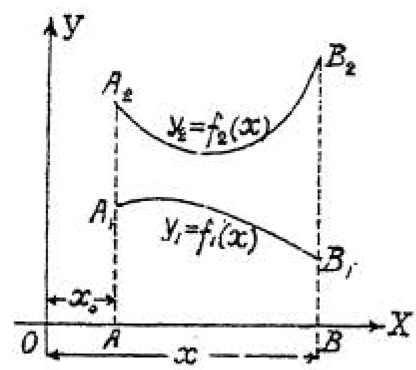
Рассмотрим теперь площадь $A_1B_1A_2B_2$ (черт.77), ограниченную ординатами: $AA_2$, соответствующей абсциссе $OA=x_0$, и $BB_2$, соответствующей абсциссе $OB=X$, -

и двумя кривыми, лежащими по одну сторону оси $OX$: $y_2=f_2(x)$ – уравнение кривой $A_2B_2$ и $y_1=f_1(x)$ – уравнение кривой $A_1B_1$; – обе функции однозначны (прямые параллельные оси $OY$ пересекают каждую кривую только в одной точке).

Искомую площадь найдем как разность двух площадей: $Q=$ площ. $AA_2BB_2$ – площ. $AA_1BB_1$; применяя форм.(31):

$$Q=\int_{x_0}^{X} y_2\,dx-\int_{x_0}^{X} y_1\,dx; \qquad Q=\int_{x_0}^{X}(y_2-y_1)\,dx. \quad (32).$$

Случай, когда площадь ограничена замкнутой кривой, несимметрично расположенной относительно осей координат, будет рассмотрен в дальнейшем.




Черт. 77.

<u>Задача I.</u> Найти площадь, ограниченную дугою синусоиды $y=\sin x$, осью $OX$ и ординатами, соответствующими абсциссам $x=m$ и $x=n$, где $n>m$.

Мы предполагаем, что читатели знакомы с построением синусоиды. По формуле (31) найдем:

$$Q=\int_m^n y\,dx=\int_m^n \sin x\,dx; \quad Q=\Big[-\cos x\Big]_m^n; \quad \underline{Q=\cos m-\cos n.}$$

Для того, чтобы найденная формула получила конкретный геометрический смысл, необходимо задать значения $m$ и $n$.

Разберем частные случаи:

1) $m=0$; $\quad n=\frac{1}{2}\pi$

$$Q_0^{\frac{1}{2}\pi}=\cos 0-\cos\tfrac{1}{2}\pi=1 \text{ (одной квадратной единице)}.$$

2) $m=0$; $n=\pi$ В силу симметрии кривой следует в ответе ожидать 2:

$$Q_0^{\pi}=\cos 0-\cos\pi=1-(-1)=2 \text{ (кв. ед.)}.$$

3) $m=\pi$; $n=2\pi$. Число, измеряющее площадь, получится со знаком минус: $Q_\pi^{2\pi}=\cos\pi-\cos 2\pi=-1-1=-2$.

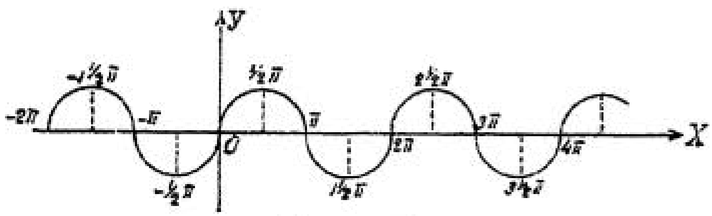
4) $m=0$; $n=2\pi$. Для одной части площади получится положительное число, для другой равной первой отрицательное, следовательно в ответе $0$: $Q_0^{2\pi}=\cos 0-\cos 2\pi=1-1=0$. Вычисляя каждую часть площади отдельно и складывая только абсолютные значения чисел, имеем: $Q_0^{2\pi}=1+|-1|=1+1=2$ (кв.ед).

5) $m=0$; $n=1\frac{1}{2}\pi$. Вычисляя площадь по частям, получим:

$$Q_0^{1\frac{1}{2}}=2+|-1|=3;$$

по формуле же найдем:

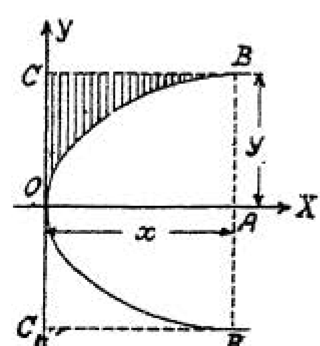
$$Q_0^{1\frac{1}{2}\pi}=\cos 0-\cos 1\tfrac{1}{2}\pi=1.$$




Черт. 78.

Задача 2. Найти площадь сегмента параболы $y^2=2px$. В силу симметрии кривой найдем сначала верхнюю часть площади, т.е. площадь ограниченную дугою $OB$ и отрезками прямых $OA$ и $AB$ (черт. 79). Из уравнения параболы имеем $y=\sqrt{2p}\cdot x^{\frac{1}{2}}$ ( для верхней половины знак плюс); по формуле (31) найдем, полагая $x_0=0$ и $X=x$:

$$Q=\int_0^x y\,dx=\int_0^x\sqrt{2p}\,x^{\frac{1}{2}}dx;\quad Q=\sqrt{2p}\left[\frac{x^{1\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{2}}\right]_0^x;$$




Черт. 79.

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot x\sqrt{x};\ \text{или:}\quad Q=\frac{2}{3}x\sqrt{2px}.$$

Дадим полученному результату геометрическое толкование: $2px=y^2$, следовательно:

$$Q=\frac{2}{3}x\sqrt{2px}=\frac{2}{3}x\sqrt{y^2};\quad Q=\frac{2}{3}xy;$$

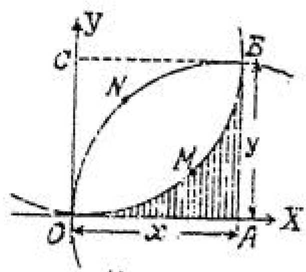
площадь половины сегмента параболы равна $\frac{2}{3}$ площади прямоугольника, построенного на координатах точки $B$, лежащей на параболе, т.е. $\frac{2}{3}$ площади прямоугольника $OABC$; площадь фигуры $OBC$ (заштрихована на чертеже) равна $\frac{1}{3}$ площади того же прямоугольника: $\frac{1}{3}xy$; площадь всего сегмента параболы равна $\frac{4}{3}xy$, т.е. $\frac{2}{3}$ площади прямоугольника $CC_1BB_1$. Этот результат был известен уже Архимеду (около 300 лет до нашей эры).

Задача 3. Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2=ax$; $x^2=ay$, где $a>0$.

Обе кривые параболы с одним и тем же параметром, которые должны быть читателю известны. Требуется найти площадь $OMBNO$; вычисление будем вести по формуле (32). Из первого уравнения имеем:

$$y_2=\sqrt{a}\cdot x^{\frac{1}{2}};$$

из второго $y_1=\frac{x^2}{a}$.



Черт. 80.

Нижней границей интегрирования очевидно будет $O$, верхней-абсцисса точки пересечения кривых $B$. Решим совместно оба уравнения; найдем $y$ из второго уравнения $y=\frac{x^2}{a}$ и, подставив в первое, будем иметь два вещественных корня: $\left(\frac{x^2}{a}\right)^2=ax$; $x^4-a^3x=0$; отсюда: $x_1=0$; и $x_2=a$; первый корень соответствует началу координат, второй - точке $B$. Итак:

$$Q=\int_0^a(y_2-y_1)\,dx=\int_0^a\left(\sqrt{a}\cdot x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{a}\right)dx=\sqrt{a}\int_0^a x^{\frac{1}{2}}\,dx-\frac{1}{a}\int_0^a x^2\,dx;$$

$$Q=\sqrt{a}\left[\frac{x^{1\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{2}}\right]_0^a-\frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{1}{3}a^2.$$

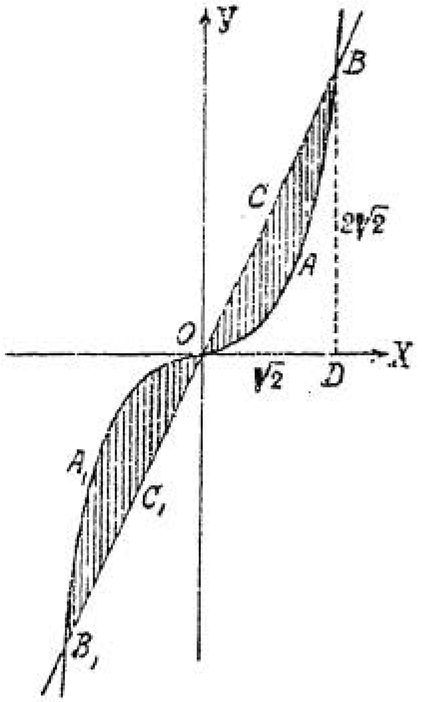
Тот же результат можно получить гораздо проще на основании формулы, полученной в предыдущей задаче.

Площадь $OABNO=\frac{2}{3}xy$; площадь $OABMO$ (заштрихована) $=\frac{1}{3}xy$; $Q=\frac{2}{3}xy-\frac{1}{3}xy=\frac{1}{3}xy$; перемножая данные в условии задачи два уравнения, получим: $x^2y^2=a^2xy$; $xy=a^2$; следовательно: $Q=\frac{1}{3}a^2$.

Задача 4. Найти площадь между прямою $y=2x$ и кривою $y=x^3$.

Прямая и кривая проходят через начало координат; найдем остальные две точки пересечения; приравнивая правые части данных уравнений, имеем: $x^3=2x$; $x^3-2x=0$; $x_1=0$; $x_2=+\sqrt{2}$; $x_3=-\sqrt{2}$; ординаты найдем по уравнению прямой; итак координаты точек пересечения следующие: 1-ая) $x_1=0$; $y_1=0$; 2-ая) $x_2=+\sqrt{2}$; $y_2=2\sqrt{2}$; 3-я) $x_3=-\sqrt{2}$; $y_3=-2\sqrt{2}$.

Дадим теперь чертеж, предоставив слушателям самим построить кривую и прямую, пользуясь теми правилами, которые указаны в дифференциальном исчислении для построения графиков функций; при этом надо иметь в виду, что кривая симметрична относительно начала координат (черт. 81). Искомая площадь состоит из двух равных частей: $OABCO$ и $OA_1B_1C_1O$, так что: $Q=2$ площадям $OABCO$. В первой четверти кривая между точками $O$ и $B$ лежит ниже прямой. Это можно и строго доказать: вторая




Черт. 81.

производная положительная: $y'=3x^2$; $y''=6x$, следовательно кривая обращена вогнутостью вверх; или еще так: $y_{прям.}-y_{крив.}=2x-x^3=x(2-x^2)$, - пока $x^2<2$ ординаты прямой больше ординат кривой.

Площадь треугольника $ODBCO$ равна: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=2$ (кв. ед).

Площадь $ODBAO$ равна:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}=1 \text{ (кв. ед)}.$$

Итак: $Q=2$ (площ. $ODBCO$ – площ. $ODBAO$) $=2(2-1)=2$ (кв. ед).

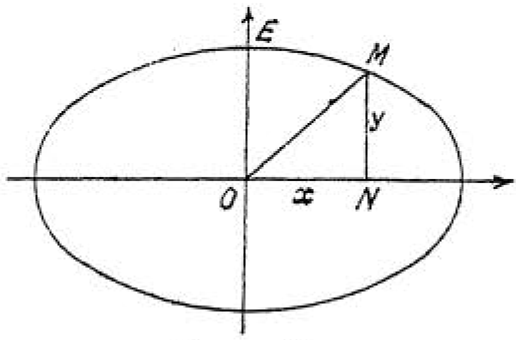
Задача 5. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x=2+y-y^2$ и осью $y$-ов.

Предлагаем слушателям самим сделать чертеж.

Кривая пересекает ось $y$-ов в точках $y=-1$ и $y=2$ и лежит по одну сторону этой оси; искомая площадь поэтому равна:

$$Q=\int_{-1}^{2} x\,dy=\int_{-1}^{2}(2+y-y^2)\,dy=\left[2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}=4\tfrac{1}{2}\ (\text{кв. ед.}).$$

Задача 6. Площадь эллипса. Так как эллипс симметричен относительно осей координат, то вычисление можно вести в первой четверти.



Черт. 82.

Найдем сначала в первой четверти площадь, ограниченную дугою эллипса, осью $x$-ов, осью $y$-ов и ординатою, соответствующей абсциссе $x$, т.е. площадь $ONMEO$ (черт. 82). По формуле (31) имеем: $Q=\int_0^x y\,dx$ из уравнения эллипса для первой четверти найдем: $y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; следовательно:

$$Q=\frac{b}{a}\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Интеграл нами уже вычислен (см. стр.    , форм.    поэтому:

$$Q=\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^x$$

Так как при $x=0$ оба слагаемые пропадают, то:

$$Q=\frac{bx\sqrt{a^2-x^2}}{2a}+\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} \qquad (1);$$

но мы имели, что $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=y$, значит рав. (1) можно переписать так:

$$Q=\frac{xy}{2}+\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} \qquad (2)$$

Первое слагаемое $\frac{xy}{2}$ есть площадь треугольника $OMN$; следовательно: произведение $\frac{ab}{2} \arcsin\frac{x}{a}$ выражает площадь сектора $OEM$. Если пожелаем вычислить площадь четвертой части эллипса, то в рав. (I) следует положить $x=a$, тогда: $Q=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{a}{a}=\frac{ab\pi}{4}$.

Площадь всего эллипса равна: $\pi ab$.

Для окружности $a=R$ и $b=R$, тогда площадь круга равна: $\pi R^2$.

Задача 7. Вычислите сами площадь, ограниченную осью $x$-ов, дугою равнобочной гиперболы $y=\frac{m}{x}$ и ординатами, соответствующими абсциссами $x_0$ и $X$, где $X > x_0$.

Ответ: $Q=m\ln\frac{X}{x_0}$; так как искомая площадь выражается с помощью натурального логарифма, то на этом основании эти логарифмы называются также гиперболическими.

2) Решим теперь легкие примеры на вычисление длины дуги. В дифференциальном исчислении даются формулы дифференциала дуги для плоской кривой, заданной уравнением в прямоугольных координатах:

$$ds=\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx, \quad \text{или:} \quad ds=\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Таким образом, составив выражение для дифференциала дуги, нам остается только произвести интегрирование в соответствующих границах. Если этими границами будут $x_0$ и $X$, где $x_0<X$, то для вычисления длины дуги будем иметь формулу:

$$s=\int_{x_0}^{X}\sqrt{1+(y')^2}\,dx; \qquad (33)$$

причем квадратный корень берется со знаком плюс, так как отсчет дуги выбирается в том направлении, чтобы дуга возрастала при возрастании переменной независимой. По основному свойству (3), если под'интегральная функция в промежутке $(x_0; X)$ больше нуля, то интеграл будет положительным. Если же под'интегральная функция меняет знак в данном промежутке, то последний разбивается на части и вычисление длины дуги (подобно вычислению площади) производится по частям.

Задача I. Длина дуги циклоиды.

Для циклоиды мы уже имели (стр. 54): $x=a(\varphi-\sin\varphi)$; $y=a(1-\cos\varphi)$, где $a$ радиус производящей окружности.

Продифференцируем данные уравнения:

$$dx=a(1-\cos\varphi)d\varphi; \quad dy=a\sin\varphi\, d\varphi, -$$

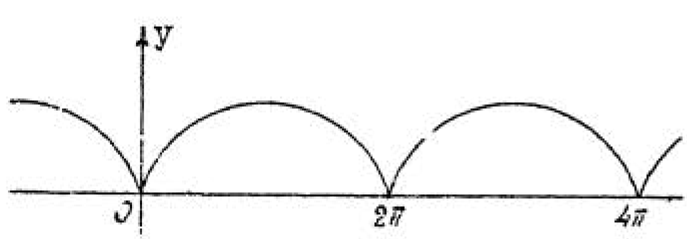
тогда:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=a\sqrt{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\cdot d\varphi=a\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi=$$
$$=2a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=4a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2}.$$

Так как переменная интегрирования $\varphi$, то для границ возьмем два какие-нибудь значения $\varphi$, – пусть они будут: $\varphi_1$ и $\varphi_2$, где $\varphi_1<\varphi_2$, — следовательно:

$$s=4a\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\frac{\varphi}{2}=4a\left[-\cos\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

В силу основного свойства 3) (стр. 111), если под'интегральная функция $\sin\frac{\varphi}{2}$ в данном промежутке больше нуля, то интеграл будет числом положительным.




Черт. 83.

Для первой арки циклоиды: (черт. 83) $0\leq\varphi\leq 2\pi$; отсюда $0\leq\frac{\varphi}{2}\leq\pi$; поэтому: $0\leq\sin\frac{\varphi}{2}\leq 1$; итак для длины первой арки получим положительное число; вычисление по формуле дает:

$$s=4a\left[-\cos\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}=4a\left[1+1\right]=8a,$$

т.е. длина дуги целой арки циклоиды равна восьми радиусам производящего круга. Точно также для второй арки: $2\pi\leqslant\varphi\leqslant4\pi$; $\pi\leqslant\frac{\varphi}{2}<2\pi$; $-1\leqslant\sin\frac{\varphi}{2}\leqslant0$; для длины дуги второй арки должно получиться отрицательное число: применяя формулу, найдем:

$$S=4a\left[-\cos\frac{\varphi}{2}\right]_{2\pi}^{4\pi}=4a(-\cos2\pi+\cos\pi)=4a(-1-1)=-8a.$$

Если бы захотели по формуле найти общую длину первой и второй арки, то в ответе бы получили нуль:

$$S=4a\left[-\cos\frac{\varphi}{2}\right]_{0}^{4\pi}=4a(-1+1)=0,$$

между тем вычисление по частям дает: $S=8a+|-8a|=16a.$

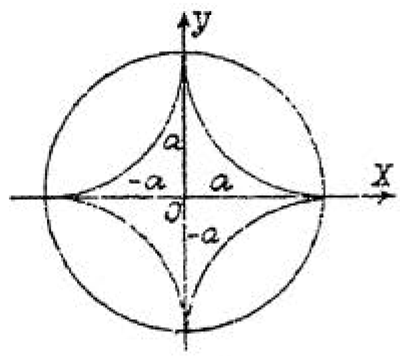
<u>Задача 2.</u> Длина дуги астроиды: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Кривая читателям известна: она симметрична относительно осей координат и делится ими на четыре равные части (черт. 84).

Вычисление будем вести по формуле (33).

Найдем производную функции:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};\quad \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0:$$




Черт. 84.

отсюда:

$$y'=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}};$$

тогда:

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2};\qquad \sqrt{1+(y')^2}=\frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}};$$

имея в виду уравнение астроиды, можно вместо выражения под корнем правой части равенства написать $a^{\frac{2}{3}}$; поэтому окончательно:

$$\sqrt{1+(y')^2}=a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}};$$

Границами интегрирования для первой части кривой будут: $0$ и $a$; следовательно:

$$s=\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=a^{\frac{1}{3}}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a;\quad s=\frac{3}{2}a.$$

Длина всей кривой равна $6a$.

Задача 3. Вычислить длину замкнутой части кривой:

$$x=3at^2;\quad y=at(3-t^2);\quad a>0.$$

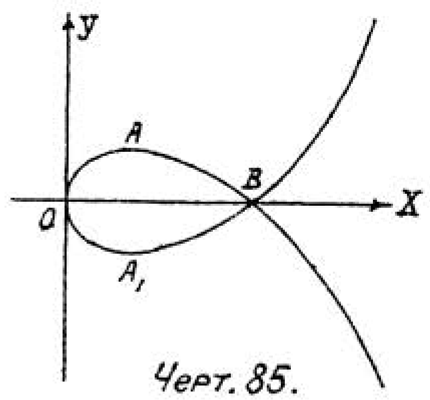
Сделаем в наших целях некоторое исследование кривой. Кривая проходит через начало координат.

Так как $a>0$, то судя по первому уравнению $x$ может быть только положительным, т.е. кривая расположена справа от оси у-ов; значения $x$ безгранично возрастают. Чтобы найти точки пересечения кривой с осью абсцисс, положим во втором уравнении $y=0$, тогда:

$$at(3-t^2)=0;\quad t=0;\quad t=\pm\sqrt{3},$$

этим значениям $t$ соответствуют $x_1=0$ и $x_2=3at^2=3a.3=9a$.

Рассмотрим теперь, как будет изменяться $y$, если $t$ будем давать все возрастающие положительные значения; $y$, оставаясь положительным, сначала растет от $0$ до $2a$ (при $t=1$; *maximum*), - затем начинает убывать, обращаясь в нуль при $t=\sqrt{3}$; при дальнейшем возрастании $t$, $y$, становясь отрицательным, растет по абсолютной величине.



Черт. 85.

Давая $t$ отрицательные значения, получим для $y$ те же самые по абсолютной величине значения, но противоположного знака. Кривая симметрична относительно оси $x$-ов; замкнутая ее часть $OABA_1O$ (черт. 85). Чтобы составить себе представление о фигуре кривой, возьмем за $a$ какой-нибудь отрезок (скажем $2mm$) и составим таблицу значений координат и нанесем полученные точки:

| $t$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $1\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\frac{3}{4}a$ | $3a$ | $6\frac{3}{4}a$ | $9a$ | $12a$ | $27a$ |
| $y$ | $0$ | $1\frac{3}{8}a$ | $2a$ | $1\frac{1}{8}a$ | $0$ | $-2a$ | $-18a$ |

Найдем теперь $dx$ и $dy$:

$$dx=6at\,dt;\quad dy=3a(1-t^2)\,dt;$$

тогда:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{36a^2t^2+9a^2(1-t^2)^2}\cdot dt=3a\sqrt{t^4+2t^2+1}\cdot dt=3a(t^2+1)\,dt.$$

Вычислим сначала длину дуги $OAB$; границами для переменной интегрирования $t$ будут: $0$ и $\sqrt{3}$.

Итак:

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}3a(t^2+1)\,dt=3a\int_0^{\sqrt{3}}t^2dt+3a\int_0^{\sqrt{3}}dt=3a\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+3a\left[t\right]_0^{\sqrt{3}}.$$

$$S=3a\frac{3\sqrt{3}}{3}+3a\sqrt{3}=6a\sqrt{3}.$$

Для длины всей замкнутой части кривой имеем: $12a\sqrt{3}$.

## Упражнения.

а) Вычислить следующие интегралы (сначала найдите неопределенный интеграл):

1) $\int_1^4 x^2dx=21$; 2) $\int_2^3 6x^2dx=38$; 3) $\int_{-2}^2 (x-1)^3dx=-20$;

4) $\int_0^a (a^2x-x^3)dx=\frac{a^4}{4}$; 5) $\int_1^4 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}=1$; 6) $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{4a}$;

7) $\int_0^2 \frac{x^3dx}{x+1}=\frac{8}{3}-\ln 3$; 8) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$; 9) $\int_{-5}^9 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+144}}=2$;

10) $\int_1^e \frac{dx}{x}=1$; 11) $\int_2^3 \frac{t\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{2}\ln 2$; 12) $\int_2^3 x\ln x\,dx=\frac{9}{2}\ln 3-\ln 4-\frac{5}{4}$;

13) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln\frac{4}{3}$; 14) $\int_0^1 \frac{dy}{y^2-y+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 15) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$;

16) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1-\frac{1}{2}\sqrt{3}$; 17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = 1$; 18) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,\alpha\, d\alpha = 0$;

19) $\int_1^2 \ln y\, dy = \ln 4 - 1$; 20) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = 1-\frac{1}{3}\sqrt{3}$; 21) $\int_0^{a\ln 2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{3}{2}a$;

22) $\int_0^1 \arcsin x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$; 23) $\int_0^1 \mathrm{arctg}\, x\, dx = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}$; 24) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\pi}{4}$.

б) Решите задачи (делая построения).

1) Найти площадь, заключенную между полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямой $x$ Ответ: $23\frac{3}{5}$.

2) Найти площадь, заключенную между кривою $y = 4 - x^2$ и осью $x$-ов. Ответ: $10\frac{2}{3}$.

3) Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 3x^2$, осью у-ов и абсциссами, соответствующими ординатам $y = 2$; $y = 4$. Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{9}(4-\sqrt{2})$.

4) Найти площадь меньшей из двух частей, на которые окружность $x^2 + y^2 = 8$ разделена параболой $y^2 = 2x$.

Ответ: $2\pi + \frac{4}{3}$.

5) Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y^2 = ax$; $x^2 = ax$; $x^2 + y^2 = 2ax$; $a > 0$.

Ответ: $2a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

6) Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до ординаты, соответствующей абсциссе $5a$

Ответ: $\frac{335}{27}a$.

7) Вычислить длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ между двумя точками, соответствующими ординатам $y = 1$ и $y = 2$.

Ответ: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$.

8) Найти длину дуги кривой: $x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$; $y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_1$.

Ответ: $\frac{1}{2}a\varphi_1^2$.

## § 28. ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ; НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### I. Приемы вычисления определенных интегралов.

В § 25 мы уже познакомились с методами интегрирования функций, но особенности определенного интеграла дают возможность внести упрощения в эти методы.

а) Замена переменной. Вспомним, как делается замена переменной при вычислении неопределенного интеграла; здесь бывает подстановка двух типов. Пусть требуется найти интеграл: $J=\int f(x)dx$.

Под'интегральная функция обязательно должна быть непрерывна и однозначна по крайней мере в том промежутке, в котором мы намерены изменять $x$. Применим подстановку первого типа: $x=\varphi(t)$, причем эта функция и ее производная также однозначны и непрерывны во взятом промежутке; дифференцирование дает $dx=\varphi'(t)dt$; заданный интеграл получает вид $J=\int f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)dt$. Предположим, что удалось произвести интегрирование и полученный результат будет:

$$J=\Phi(t)+C. \qquad (1).$$

Теперь нам надлежит снова вернуться к прежней переменной $x$, для этого уравнения $x=\varphi(t)$ должно допускать и решение обратного вопроса, т.е. выражение $t$ через $x$; пусть $t=\psi(x)$ (эта функция должна быть однозначна и непрерывна).

Подставив в рав. (I) $\psi(x)$ вместо $t$ получим:

$$J=\Phi\left[\psi(x)\right]+C \qquad (2).$$

Если ищется определенный интеграл $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, то, оставаясь при новой переменной, следует ввести только новые границы, которые можно найти так: подставим в уравнение $t=\psi(x)$ вместо $x$ последовательно $x_0$

и $X$, тогда $t_0=\psi(x_0)$ и $T=\psi(X)$. Докажем, что:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

В результате интегрирования нами было получено сначала $J=\Phi(t)+C$ ( рав. (1)), а затем $J=\Phi[\psi(x)]+C$ (рав. (2) ); поэтому в первом случае будем иметь:

$$\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt=\Phi(T)-\Phi(t_0) \qquad (3)$$

а во втором:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\Phi[\psi(X)]-\Phi[\psi(x_0)] \qquad (4)$$

но мы знаем, что $t_0=\psi(x_0)$ и $T=\psi(X)$ или, $\psi(x_0)=t_0$ и $\psi(X)=T$, - следовательно: вместо $\Phi[\psi(X)]-\Phi[\psi(x_0)]$ получим: $\Phi(T)-\Phi(t_0)$, тогда рав.(4) перепишется так:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\Phi(T)-\Phi(t_0) \qquad (5)$$

Правые части рав.(3) и рав. (5) равны, а потому:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt. \qquad (6)$$

Доказательство справедливости формулы (6) можно было бы вести также, рассматривая определенный интеграл, как предел суммы.

Приведем это доказательство (желающие могут ознакомиться с ним).

Возьмем основную формулу (15) § 27 написав только для простоты рассуждений $x$ вместо $\xi$:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\lim\left\{\sum_{k=0}^{k=n-1} f(x_k)\,\Delta x_k\right\}_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}}.$$

Допустим сначала, что $t_0<T$ и что функция $x=\varphi(t)$ такого характера, что когда $t$ непрерывно растет от $t_0$ до $T$, то и $x$ непре-

равно растет от $x_0$ до $X$. Разделим промежуток $T-t_0$ на $n$ равных частичных промежутков: $t_1-t_0$; $t_2-t_1$; . . . . . $t_{k+1}-t_k$; . . . . . $T-t_{n-1}$, – тогда и промежуток $X-x_0$ разделится также на $n$ каких-нибудь частичных промежутков: $x_1-x_0$; $x_2-x_1$; . . . . , $x_{k+1}-x_k$, . . . . . $X-x_{n-1}$.

В силу характера функции $x=\varphi(t)$ с увеличением числа $n$ все частичные промежутки стремятся к нулю.

Введем теперь в правую часть формулы (I5) новую переменную $t$.

Из дифференциального исчисления известно, что приращение функции равно дифференциалу функции плюс бесконечно малая не ниже второго порядка - ничего в строгости доказательства не изменится, если для простоты будем считать ее бесконечно малою второго порядка:

$$x=\varphi(t); \qquad \Delta x=\varphi'(t)\,dt+\varepsilon.$$

Дифференциал аргумента равен приращению аргумента; так как $t$ теперь аргумент, то $dt=\Delta t$, поэтому:

$$\Delta x=\varphi'(t)\cdot\Delta t+\varepsilon.$$

Вместо выражения $f(x_k)\cdot\Delta x_k$ получим:

$$f(x_k)\cdot\Delta x_k=f\left[\varphi(t_k)\right]\cdot\left[\varphi'(t_k)\cdot\Delta t_k+\varepsilon_k\right],$$

или:

$$f(x_k)\cdot\Delta x_k=f\left[\varphi(t_k)\right]\varphi'(t_k)\cdot\Delta t_k+\varepsilon_k\cdot f\left[\varphi(t_k)\right]$$

При умножении бесконечно малой величины на конечную порядок ее не изменяется, следовательно, произведение $\varepsilon_k\cdot f\left[\varphi(t_k)\right]$ одного порядка с порядком $\varepsilon_k$ обозначим это произведение через $\alpha_k$ тогда:

$$f(x_k)\cdot\Delta x_k=f\left[\varphi(t_k)\right]\cdot\varphi'(t_k)\cdot\Delta t_k+\alpha_k.$$

Итак:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left\{\sum_{K=0}^{K=n-1} f\left[\varphi(t_K)\right].\varphi'(t_K).\Delta t_K\right\}_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t_K\to 0}} + \lim\left[\sum_{K=0}^{K=n-1}\alpha_K\right]_{\substack{n\to\infty\\ \alpha_K\to 0}} \quad (7)$$

Рассмотрим сумму: $\sum_{K=0}^{K=n-1}\alpha_K = \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_K+\ldots+\alpha_{n-1}$;

по предыдущему каждое из слагаемых, а потому и наибольшее по абсолютной величине из них, которое обозначим через $\beta$, бесконечно малые не ниже второго порядка.

Заменив каждое из слагаемых через $\beta$ находим:

$$\left|\sum_{K=0}^{K=n-1}\alpha_K\right| < \left|n\beta\right|; \quad \textit{или}: \left|\sum_{K=0}^{K=n-1}\alpha_K\right| = \theta\left|n\beta\right|, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Из уравнения $\frac{T-t_0}{n}=\Delta t$ имеем: $n=\frac{T-t_0}{\Delta t}$,

тогда:

$$\left|\sum_{K=0}^{K=n-1}\alpha_K\right| = \theta\left|\frac{\beta}{\Delta t}(T-t_0)\right|.$$

Здесь $\beta$ бесконечно малая не ниже второго порядка, $\Delta t$ первого порядка; отношение двух бесконечно малых величин будет величиной бесконечно малой, если порядок числителя выше порядка знаменателя,-значит $\frac{\beta}{\Delta t}$ бесконечно-малая и произведение ее на конечную $T-t_0$ тоже бесконечно малая, поэтому:

$$\lim\left[\sum_{K=0}^{K=n-1}\alpha_K\right]_{\substack{n\to\infty\\ \alpha_K\to 0}} = 0.$$

Теперь рав. (7) перепишется так:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left\{f\left[\varphi(t_K)\right]\varphi'(t_K)\,\Delta t_K\right\}_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t_K\to 0}},$$

или:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dt = \int_{t_0}^{T} f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt.$$

Полученную формулу можно обобщить для случая, когда $\varphi(t)$ имеет *maxima* и *minima* в промежутке $(t_0; T)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На практике часто употребляется, как уже упоминалось, подстановка второго типа $t=F(x)$. Относительно обоих типов подстановок следует помнить, что функция, выражающая зависимость между прежней и новой переменной и обратная ей функция, если ею приходится пользоваться, обязательно должны быть непрерывны и однозначны, иначе может получиться неверный результат, чему впоследствии будут приведены примеры.

Решим несколько примеров на замену переменной.

I) $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, где $a>0$.

При изменении $x$ от $-a$ до $a$ под'интегральная функция все время остается определенной, непрерывной и однозначной.

Вычислим интеграл сначала по формуле:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx=\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a}=\frac{\pi a^2}{2}$$

Возьмем теперь подстановку: $x=a\sin\varphi$; эта функция также однозначна и непрерывна. Обратная ей функция $\varphi=\arcsin\frac{x}{a}$ будет уже многозначною. Если положить сначала $x=-a$ и затем $x=a$, то для $\varphi$ найдем $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, т.е. при изменении $x$ от $-a$ до $a$ новая переменная $\varphi$ будет изменяться от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ но при том же самом изменении $x$ переменная $\varphi$ может также изменяться от $2\pi-\frac{\pi}{2}$ до $2\pi+\frac{\pi}{2}$ или от $4\pi-\frac{\pi}{2}$ до $4\pi+\frac{\pi}{2}$ и т.д. Если под $\arcsin$ понимать, как это всегда делается в анализе, только так называемое «главное значение», то $\arcsin$ будет функцией не только непрерывной, но и однозначной.

Исходя из уравнения $x=a\sin\varphi$, найдем $dx=a\cos\varphi d\varphi$; тогда:

$$\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\varphi}\cdot a\cos\varphi d\varphi=a^2\cos^2\varphi d\varphi;$$

следовательно:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\varphi d\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi;$$

нам известно, что:

$$\cos^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$

поэтому:

$$a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\frac{a^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\varphi d2\varphi,$$

и окончательно:

$$a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\Big[\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{a^2}{4}\Big[\sin 2\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В рассмотренном нами примере границы равны по абсолютной величине, но обратны по знаку; в дальнейшем будут указаны возможные в этом случае упрощения.

2) $$J=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\qquad a\neq 0;\quad b\neq 0.$$

Знаменатель под'интегральной функции постоянно больше нуля; функция определенна непрерывна и однозначна; в силу основного свойства 3 (см. стр 111) интеграл может быть только положительным числом. Возьмем подстановку $tg\,\varphi=z$; эта функция и ее производная $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ непрерывны только в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Пусть $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$, - тогда все будет в порядке: взятые границы целиком лежат в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; в том же промежутке однозначна и функция $\varphi=arctg\,z$, да ею не придется и пользоваться ( в этом часто бывает одно из удобств подстановки второго типа); новые границы найдем следующим образом:

$$\varphi_1=0; \quad z_1=tg\,\varphi_1=tg\,0=0;$$
$$\varphi_2=\frac{\pi}{4}; \quad z_2=tg\,\varphi_2=tg\,\frac{\pi}{4}=1.$$

Итак:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi):\cos^2\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\,tg\,\varphi}{a^2+b^2tg^2\varphi};$$

или:

$$J=\int_0^1\frac{dz}{a^2+b^2z^2}=\frac{1}{ab}\int_0^1\frac{d\left(\frac{b}{a}z\right)}{1+\left(\frac{b}{a}z\right)^2}=\frac{1}{ab}\left[arctg\,\frac{b}{a}z\right]_0^1=\frac{1}{ab}\,arctg\,\frac{b}{a}.$$

При $a=1$ и $b=1$ получим:

$$J=arctg\,1=\frac{\pi}{4},$$

что и следовало ожидать, так как:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi=\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

Пусть теперь требуется вычислить интеграл:

$$J=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}.$$

Под'интегральная функция остается попрежнему непрерывною и однозначною и интеграл будет равен, как впоследствии узнаем (см. стр. 152) $\frac{\pi}{ab}$; но прежняя подстановка здесь не применима, потому что функция $z=tg\,\varphi$ в промежутке между $0$ и $\pi$ разрывается при $\frac{\pi}{2}$. Действительно: найдем новые границы: $z_1=tg\,0=0$; $z_2=tg\,\pi=0$, – и, пользуясь прежними выкладками, имеем:

$$J=\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=\int_0^0\frac{dz}{a^2+b^2z^2}=0,$$

(границы равны), что нелепо.

3) $J=\int_0^1 \frac{(6x+5)\,dx}{3x^2+5x+1}$.

Под'интегральная функция в данном промежутке непрерывна и однозначна. Возьмем подстановку: $t=3x^2+5x+1$, откуда: $dt=(6x+5)\,dx$; вновь взятая функция и ее производная непрерывны в промежутке $(0;1)$; обратной функции брать не придется; границы найдем следующим образом:

$$t_1=3x_1^2+5x_1+1=3.0+5.0+1=1;\quad t_2=3x_2^2+5x_2+1=3.1^2+5.1+1=9.$$

Итак:

$$J=\int_0^1 \frac{(6x+5)\,dx}{3x^2+5x+1}=\int_1^9 \frac{dt}{t}=\Big[\ln t\Big]_1^9=\ln 9.$$

б) Интегралы с равными по абсолютной величине, но с обратными по знаку, границами.

Здесь надлежит различать случаи, когда под'интегральная функция будет четною и нечетною.

Функция $f(x)$ называется четной, если при всяком значении $x$ имеет место следующее равенство: $f(-x)=$ $=f(x)$ и нечетной, если: $f(-x)=-f(x)$. Например, функции: $x^2$; $\cos x$; $\sin^2 x$ будут четными, а функции: $x^3$; $\sin x$ – нечетными. Некоторые функции нельзя назвать ни четными, ни нечетными: $3x^2-4x$; $\sin x+x^4$.

Пусть требуется найти интеграл: $\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx$. В силу основного свойства 5, этот интеграл можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{+a} f(x)\,dx. \qquad (8)$$

Преобразуем первый интеграл правой части, делая замену $x=-z$, тогда $dx=-dz$ и для новых границ: $z_1=-x_1=-(-a)=+a$; $z_2=x_2=0$; – следовательно: $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_{+a}^{0} f(-z)\,dz=\int_{0}^{+a} f(-z)\,dz$.

Так как величина интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, то напишем вместо $z$ снова $x$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} f(-x)\,dx; \text{ - и рав. (1)}$$

получит вид:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{+a} f(x)\,dx,$$

или:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{+a} \left[f(-x) + f(x)\right] dx.$$

Если $f(x)$ четная функция, то: $f(-x)+f(x)=2f(x)$; если же нечетная: $f(-x)+f(x)=0$; поэтому получим:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{(при четной функции); (9).}$$

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{( при нечетной функции); (10).}$$

Примеры:

$$\int_{-1}^{+1} x^2\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}; \int_{-5}^{+5} x^3\,dx = 0; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2; \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0; \int_{-3}^{+3} dx = 2\int_{0}^{+3} dx = 2\left[x\right]_0^3 = 6; \int_{-2}^{+2} 7\,dx = 14;$$

$$\int_{-3}^{+3}\left(\frac{1}{27}x^4 + 5x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4x - 2\right)dx = 2\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{1}{3}x^2 - 2\right)dx = 2\left(\frac{9}{5} - 3 \cdot 6\right) = -14$$

c) Интегрирование по частям.

Возьмем формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, где $u$ и $v$ некоторые функции от $x$; полагая сначала $x=X$, а затем $x=x_0$ и вычитая из первого равенства второе, получим:

$$\int_{x_0}^{X} u\,dv = \left[u\,v\right]_{x_0}^{X} - \int_{x_0}^{X} v\,du. \qquad (11)$$

В таком виде формула интегрирования по частям в применении к определенному интегралу вносит упрощения.

Пользуясь этой формулой, найдем два интеграла, которые понадобятся нам при решении практических задач:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Докажем сначала, что оба интеграла равны; сделаем в первом замену переменной: $x=\frac{\pi}{2}-t$; $dx=-dt$; для новых границ имеем:

$$x_1=\frac{\pi}{2}-t_1; \quad 0=\frac{\pi}{2}-t_1; \quad t_1=\frac{\pi}{2};$$
$$x_2=\frac{\pi}{2}-t_2; \quad \frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-t_2; \quad t_2=0.$$

Первый интеграл примет вид:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt;$$

величина интеграла не зависит от обозначения переменной, поэтому напишем снова $x$ вместо $t$, тогда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Вернемся к вычислению первого интеграла, причем нам придется пользоваться следующими обозначениями:

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx; \quad J_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,dx; \ldots ; J_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx; \quad J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 x\,dx;$$
$$J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\,dx.$$

Последние два интеграла легко найти:

$$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1; \quad J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

Интеграл $J_n$ преобразуем так:

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\cos x\,dx; \quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,d\sin x.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем:

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,d\sin x=\Big[\cos^{n-1} x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d\cos^{n-1} x.$$

Произведение, стоящее в скобках, равно нулю и при $x=0$ и при $x=\frac{\pi}{2}$, – поэтому:

$$J_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\, d\cos^{n-1}x=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^{n-2}\sin x\, dx,$$

или:

$$J_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x\, dx.$$

Подставляя далее $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ и разбивая интеграл на два, найдем:

$$J_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\, dx,$$

или:

$$J_n=(n-1)\,J_{n-2}-(n-1)\,J_n,$$

отсюда:

$$J_n=\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

Пользуясь полученной формулой приведения, следует различать два случая: $n$ четное и $n$ нечетное.

I) Пусть $n=2k$; тогда подставляя в формуле приведения вместо $n$ последовательно: $2k;\ 2k-2;\ \ldots 4;2;0$, – имеем:

$$J_{2k}=\frac{2k-1}{2k}J_{2k-2};\quad J_{2k-2}=\frac{2k-3}{2k-2}J_{2k-4};\ \ldots.J_4=\frac{3}{4}J_2;\ J_2=\frac{1}{2}J_0.$$

Перемножая эти равенства и сокращая равные члены, записанные по обеим сторонам равенств, найдем:

$$J_{2k}=\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot J_0;\quad J_0=\frac{\pi}{2},$$

тогда:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k}x\, dx=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2k}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (12)$$

2) Пусть теперь $n=2k+1$. Поступая подобно предыдущему, имеем:

$$J_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}J_{2k-1};\quad J_{2k-1}=\frac{2k-2}{2k-1}J_{2k-3},\dots,J_5=\frac{4}{5}J_3;\ J_3=\frac{2}{3}J_1,-$$

отсюда:

$$J_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1}\cdot\dots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}J_1;\quad \text{но}\ J_1=1,-$$

следовательно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2k-1}x\,dx=\frac{2.4.6\dots\dots2k}{1.3.5\dots\dots(2k+1)}\qquad(13).$$

Те же формулы будут и для $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

Применим полученные формулы к частным случаям:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4};\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\,dx=\frac{2}{3};$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4x\,dx=\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16};\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\,dx=\frac{2.4}{3.5}=\frac{8}{15}.$$

*д*) Практические задачи.

Задача I. Площадь астроиды. Эта кривая нам уже встречалась (см. стр. 129 и черт. 94). Оси координат разделяют площадь, ограниченную кривой, на четыре равные части; поэтому для искомой площади имеем: $Q=4\int_0^a y\,dx$.

Здесь удобнее взять параметрические уравнения кривой: $x=a\sin^3\varphi$ и $y=a\cos^3\varphi$ тогда:

$$y\,dx=a\cos^3\varphi\,d\,a\sin^3\varphi=3a^2\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi.$$

Раньше отсчет площади шел в сторону положительной части оси $x$-ов; посмотрим, куда будет итти отсчет площади с возрастанием $\varphi$; по уравнению $x=a\sin^3\varphi$ заключаем, что с увеличением $\varphi$ от $0$ до $\frac{\pi}{2}$, $x$ растет от $0$ до $a$, т.е. отсчет площади направлен в ту же сторону, как и раньше. Новыми границами очевидно будут $0$ и $\frac{\pi}{2}$.

Итак: $Q=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi$. Подставляя

$1-\cos^2\varphi$ вместо $\sin^2\varphi$ и разбивая интеграл на два, имеем: $Q=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi-12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi\, d\varphi$. Пользуясь форм. (12), найдем:

$$Q=12a^2\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}-12a^2\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{9}{4}\pi a^2\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

Задача 2. Площадь, ограниченная осью $OX$ и одной аркой циклоиды. Кривая нам встречалась (см. стр. 128 и черт. 83); уравнение ее: $x=a(\varphi-\sin\varphi)$ и $y=a(1-\cos\varphi)$. Очевидно длина основания арки равна $2\pi a$ тогда:

$$Q=\int_0^{2\pi a} y\, dx.$$

Новые границы удобнее найти, исходя из механического определения циклоиды: для получения первой арки параметр надо менять от $0$ до $2\pi$ Для $dx$ и $y\,dx$ имеем:

$$dx=a(1-\cos\varphi)\,d\varphi;\qquad y\,dx=a^2(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi.$$

Итак: $Q=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$. Желая свести интегрирование к форм. (12) (верхняя граница $\frac{\pi}{2}$) и пользуясь тем, что арка циклоиды симметрична относительно перпендикуляра, восставленного в середине основания, составим площадь из двух частей:

$$Q=2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi=8a^2\int_0^{\pi}\sin^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

Возьмем подстановку:

$$\frac{\varphi}{2}=t;\qquad d\varphi=2\,dt,$$

тогда:

$$Q=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt=16a^2\,\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi a^2.$$

Задача 3. Найти площадь, ограниченную кривой:

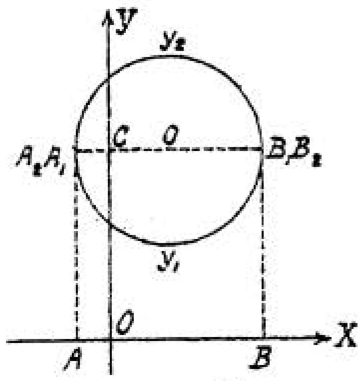
$$x^2-4x+y^2-10y+20=0.$$

Преобразуем данное уравнение:

$$x^2-4x+4+y^2-10y+25-25-4+20=0$$

$$(x-2)^2+(y-5)^2=9.\qquad(1).$$

Получилась окружность (черт. 86), координаты центра которой 2 и 5 и радиус 3. Площадь, ограниченная этой окружностью очевидно равна $\pi 3^2 = 9\pi$; задача приводится здесь только, как простой пример вычисления площади, ограниченной замкнутой кривой, лежащей по одну сторону оси $OX$. На стр. 122 была выведена формула $Q=\int_{x_0}^{X}(y_2-y_1)dx$; но там имелось две кривых: $y_2$ относилось к верхней кривой и $y_1$ к нижней - в данном случае к верхней и нижней части окружности. Из уравн. (I) найдем:




Черт. 86.

$$y=5\pm\sqrt{9-(x-2)^2};\qquad y_2=5+\sqrt{9-(x-2)^2};\ y_1=5-\sqrt{9-(x-2)^2};\ -$$

тогда: $y_2-y_1=2\sqrt{9-(x-2)^2}$.

Границы интегрирования найдем следующим образом: сравнивая чертежи 77 и 86, заключаем, что точки $A_2$ и $A_1$ совпадают, следовательно $AA_2=AA_1$, а потому для точек $A_1$ и $B_1$ (черт. 86) $y_2=y_1$, или: $5+\sqrt{9-(x-2)^2}=5-\sqrt{9-(x-2)^2}$; $\sqrt{9-(x-2)^2}=0$; $x_1=-1$; $x_2=5$; очевидно: $x_1=-1$ соответствует точке $A$ и $x_2=5$ точке $B$; те же границы можно было найти и при помощи чисто геометрических соображений:

$$A_1C=A_1O-CO=3-2=1;\quad x_1=-1;\qquad CB_1=CO+OB_1=2+3=5;\quad x_2=5.$$

Итак: $Q=2\int_{-1}^{5}\sqrt{9-(x-2)^2}\,dx$.

Вводим подстановку: $x-2=t$; $dx=dt$. Новыми границами будут: $t_1=x_1-2=-1-2=-3$; $t_2=x_2-2=5-2=3$, поэтому:

$$Q=2\int_{-3}^{3}\sqrt{9-t^2}\,dt=4\int_{0}^{3}\sqrt{9-t^2}\,dt,$$

и по формуле (26), данной на стр.69.

$$Q=4\left[\frac{t}{2}\sqrt{9-t^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{t}{3}\right]_0^3=4\cdot\frac{9}{2}\left[\arcsin\frac{t}{3}\right]_0^3=4\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=9\pi.$$

## Упражнения.

а) Вычислить следующие интегралы:

1) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2}{3}(\sqrt{2}-1)$; 2) $\int_0^a \frac{xdx}{x^2+a^2} = \ln\sqrt{2}$; 3) $\int_0^{+\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\ln 3}{2}$;

4) $\int_0^{2r} \frac{2\sqrt{2r}\,dy}{\sqrt{2r-y}} = 8r$; 5) $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx = 2(2-\operatorname{arctg}2)$, положить $\sqrt{x-1}=t$;

6) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}} = \ln\frac{3}{2}$; положить: $z=\frac{1}{t}$; 7) $\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin x\,dx = 2\pi$;

8) $\int_0^a \frac{x^3dx}{a^2+x^2} = \frac{a^2}{2}(1-\ln 2)$; положить: $a^2+x^2=t^2$;

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{6-5\sin\varphi+\sin^2\varphi} = \ln\frac{4}{3}$, положить $\sin\varphi = x$;

10) $\int_0^e x\ln x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$; 11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{4}$; 12) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4-2\ln 3$;

13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi}{3+\sin 2\varphi} = \frac{\ln 3}{4}$; положить: $\sin\varphi-\cos\varphi=z$.

14) $\int_0^a y^2\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \frac{\pi a^4}{16}$; положить: $y=a\sin z$.

15) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = \frac{4-\pi}{2}$; положить: $e^x+1=z$.

16) $\int_0^1 \sqrt{2t+t^2}\,dt = \sqrt{3}-\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$; положить: $t+1=z$.

17) $\int_0^1 \frac{z^n dz}{\sqrt{1-z^2}}$; положить: $z=\sin\varphi$; 18) $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$;

19) $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx = -2\pi$; 20) $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} = 8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$; положить $x-2=z^3$;

21) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = 4-\pi$; положить: $e^x-1=z^2$.

$b$) Решить задачи.

1) Найти площадь, ограниченную осью $OX$ и частью кривой $y=x\sin x$, лежащей между началом координат и ближайшей точкой пересечения с осью $x$-ов. Ответ: $\pi$.

2) Вычислить площадь, ограниченную кривой $y=\ln x$, осью $x$-ов и ординатами, соответствующими абсциссам $x=2$ и $x=8$.

Ответ: $22\ln 2-6$.

3) Найти площадь, ограниченную осями координат и кривой $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{6}a^2$

4) Найти площадь, содержащуюся внутри одного завитка кривой $x^2=y^2(1-y^2)$.

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

5) Вычислить площадь, содержащуюся внутри параболы $x^2=4y+4$ и окружности $x^2+y^2=16$.

Ответ: $\frac{16}{3}\pi+4\sqrt{3}$.

6) Вычислить площадь, ограниченную кривой $x^2-xy+y^2=3$.

Ответ: $2\pi\sqrt{3}$.

7) Вычислить площадь, содержащуюся внутри кривой: $\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

Ответ: $\frac{3}{4}\pi ab$.

8) Вычислить длину дуги цепной линии, содержащейся между точками, для которых $x=-a$ и $x=+a$.

Ответ: $a(e-\frac{1}{e})$.

9) Найти длину дуги кривой $9ay^2=x(x-3a)^2$ содержащейся между точками, для которых $x=0$ и $x=3a$.

Ответ: $2a\sqrt{3}$.

10) Найти длину дуги кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ в одном ее квадранте.

Ответ: $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

11) Найти длину дуги кривой $e^y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, содержащуюся между точками, для которых $x=a$ и $x=b$.

Ответ: $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b$.

12) Вычислить длину дуги кривой $x=\ln\sec y$, содержащейся между точками, для которых $y=0$ и $y=\frac{\pi}{3}$

Ответ: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

2. Несобственные интегралы.

а) Интегралы с бесконечными границами. При решении практических задач встречаются интегралы с бесконечными границами; при выводе же формулы (15) § 27, из которой исходили, изучая свойства определенного интеграла, мы предполагали, что границы интеграла $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ величины конечные. Рассматривая интеграл (подинтегральная функция непрерывна и однозначна), как площадь, причем для простоты рассуждения предполагаем, что кривая всеми своими точками лежит выше оси $x$-ов, начнем увеличивать безгранично $X$, оставляя без изменения $x_0$; тогда начальная ордината остается неподвижной, конечная будет все время отодвигаться; очевидно площадь должна расти; спрашивается: будет ли эта площадь стремиться к определенному пределу.

Итак под интегралами с бесконечными границами подразумевается тот предел, к которому этот интеграл стремится, если одна из границ, или обе границы безгранично растут:

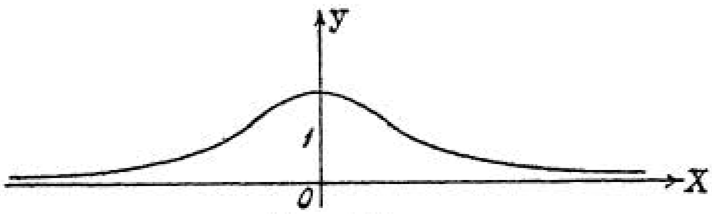
$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx=\lim\left[\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx\right]_{X\to\infty};\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\left[\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx\right]_{\substack{X\to\infty\\ x_0\to-\infty}};$$

если этот предел существует, то данный интеграл называется сходящимся - если же предела нет, то - расходящимися (определенного смысла интеграл не имеет).

Поясним сказанное примерами:

1) Пусть требуется найти площадь, ограниченную кривой $y=\frac{1}{1+x^2}$, осями координат и ординатой, соответствующей абсциссе $X>0$.

Данная функция непрерывна и однозначна при всех изменениях $x$. Кривая всеми своими точками лежит по




Черт. 87.

одну сторону оси абсцисс (черт.87), отсекает от оси ординат отрезок равный 1 и симметрична относительно этой оси; с возрастанием $x$ до $\infty$, конечно, $y$ стремится к $0$, — таким образом ось абсцисс будет служить асимптотой кривой (построение сделайте сами по точкам).

Искомая площадь равна

$$\int_0^X \frac{dx}{1+x^2}=\left[arctg\,x\right]_0^X=arctg\,X.$$

С возрастанием $X$ получим:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{X\to\infty}\left[\int_0^X\frac{dx}{1+x^2}\right]=\lim_{X\to\infty}\left[arctg\,X\right]=arctg\,\infty=\frac{\pi}{2}$$

предел существует: интеграл будет сходящимся.

Кривая симметрична относительно оси $OY$, поэтому для всей площади, ограниченной кривой и осью $OX$ имеем: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$

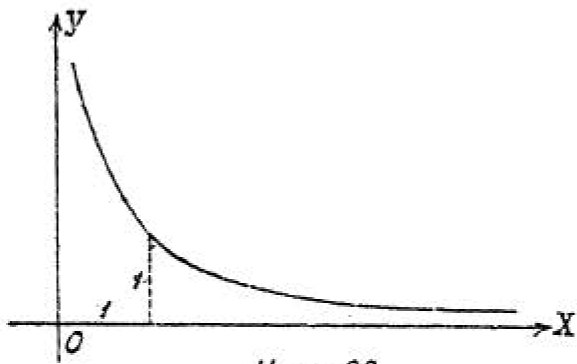
2) Вычислим площадь, ограниченную кривой $y=\frac{1}{x}$, осью $x$-ов и двумя ординатами, соответствующими абсциссам $x_0=1$; $X>1$.

Данная кривая равнобочная гипербола; оси координат ее асимптоты (черт. 88).

Для искомой площади имеем:

$$\int_1^X \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^X = \ln X.$$

Если теперь начнем увеличивать $X$, то площадь не будет стремиться, как в предыдущей задаче, к определенному пределу: интеграл безгранично растет, что условно можно записать так:



Черт. 88.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty;$$

итак интеграл - расходящийся.

3) $\int_0^\infty \sin x\,dx$. Возьмем сначала определенный интеграл с конечной верхней границей:

$$\int_0^X \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^X = 1-\cos X = 2\sin^2\frac{X}{2}.$$

С возрастанием $X$ числовая величина $2\sin^2\frac{X}{2}$ колеблется, не выходя из пределов $0$ и $2$, и интеграл $\int_0^\infty \sin x\,dx$ не имеет определенного смысла.

4) Рассмотрим интеграл $\int_0^\infty e^{ax}dx$ при $a>0$ и $a<0$.

Возьмем попрежнему сначала обыкновенный интеграл:

$$\int_0^X e^{ax}dx = \left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_0^X = \frac{e^{aX}-1}{a}.$$

Пусть $a>0$, тогда с возрастанием $X$ растет безгранично и $e^{ax}$ интеграл будет расходящийся; условно запишем: $\int_0^\infty e^{ax}dx=\infty$ при $a>0$.

Если $a<0$, то поставим на вид знак: $a=-\alpha$, где же $\alpha>0$, тогда.

$$\int_0^X e^{-\alpha x}dx=\frac{e^{-\alpha x}-1}{-\alpha}=\frac{1-e^{-\alpha x}}{\alpha}=\frac{1-e^{\frac{1}{ax}}}{\alpha}.$$

С возрастанием $X$ функция $e^{\frac{1}{ax}}$ стремится к $0$ и

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha},\quad \alpha>0.$$

Итак в этом случае интеграл сходящийся.

7) На стр. 138 и 139 нами был рассмотрен интеграл

$$\int_0^\pi\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi};$$

причем было выяснено, что подстановка $tg\varphi=z$ в данном случае не применима, так как функция $tg\varphi$ в промежутке от $0$ до $\pi$ разрывается при $\frac{\pi}{2}$. На основании основного свойства 5) (см. стр. 112) получим:

$$\int_0^\pi\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}.$$

Для второго интеграла правой части возьмем подстановку: $\varphi=\pi-\psi$; $d\varphi=-d\psi$, — тогда:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{d\psi}{a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{a^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}.$$

В силу основного свойства I) (см. стр. 110) вместо $\psi$ пишем снова $\varphi$ и для искомого интеграла будем иметь:

$$\int_0^\pi\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}.$$

Сделав указанное на стр. 139 преобразование подынтегрального выражения и взяв подстановку $tg\varphi=z$, найдем:

$$\int_0^\pi\frac{d\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=2\int_0^\infty\frac{dz}{a^2+b^2z^2}=\frac{2}{ab}\left[arctg\frac{bz}{a}\right]_0^\infty=\frac{2}{ab}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{ab}.$$

6) Рассмотрим теперь два интеграла, которые нам пригодятся впоследствии.

На основании формулы для интегрирования функций (см. стр. 73 ) получим:

$$\int_0^X e^{-ax}\sin bx\,dx = e^{-aX}\frac{a\sin bX + b\cos bX}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2},\ где\ a>0.$$

Возьмем первое слагаемое правой части равенства; оно состоит из двух сомножителей; первый $e^{-aX}$, как было показано в примере четвертом, стремится к нулю при безграничном увеличении $X$, второй же остается конечным, так что первое слагаемое стремится к нулю. Итак при $X$ равном $\infty$ имеем:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2 b^2}\ при\ a>0.$$

Точно также найдем:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\ при\ a>0.$$

Вычисление сходящихся интегралов, как можно доказать, в общем производится теми же приемами, как и интегралов с конечными границами. Возьмем для примера формулу:

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_0^{+a} f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ четная функция; переходя к пределам, для случая сходящихся интегралов имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\,dx;$$

формула интегрирования по частям получает вид:

$$\int_0^\infty f(x)\,d\varphi(x) = \Big[f(x)\,\varphi(x)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x)\,df(x);\ и\ т.\ д.$$

Задача. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы удалить тело с поверхности земли на бесконечно большое расстояние; размеры тела и сопротивление воздуха в расчет не принимаются; земной сфероид рассматривается, как шар. Обозначим: расстояние точки, взятой на поверхности, от центра земли через $r_0$; расстояние от того же центра какой-нибудь точки пространства через $r$; силу земного притяжения в каждой из точек соответственно через: $F_0$ и $F$. По закону Ньютона сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра земли, т.е.:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{r_0^2}{r^2}; \qquad F = \frac{F_0 r_0^2}{r^2}.$$

Сила притяжения на поверхности земли при надлежащем выборе единиц (о чем было уже упомянуто раньше) равна: $F_0 = mg$, где $m$ масса материальной точки и $g$ ускорение силы тяжести, поэтому: $F = \frac{mg r_0^2}{r^2}$.

Удалим сначала тело на конечное расстояние $R$ (от центра земли). Разобьем промежуток $R - r_0$ на $n$ частичных промежутков: $r_1 - r_0$; $r_2 - r_1$; ....; $r_{k+1} - r_k$; ... .... $R - r_{n-1}$, — обозначим эти промежутки соответственно через:

$$\Delta r_0;\ \Delta r_1;\ \Delta r_2;\ \ldots;\ \Delta r_k;\ \ldots;\ \Delta r_{n-1}.$$

Пусть сила притяжения для начала каждого промежутка будет: $F_0$; $F_1$; $F_2$; ...; $F_k$; ...; $F_{n-1}$; — и предположим, что эта сила внутри каждого промежутка остается той же самой, как и в начале его. Работа в данном случае, как известно из физики, равна произведению силы на пройденный путь; таким образом, чтобы удалить тело на расстояние первого промежутка надо затратить работу $F_0 \cdot \Delta r_0$, затем на расстояние второго $F_1 \cdot \Delta r_1$ и т.д.

Для работы, затраченной для удаления тела на расстояние $R$, будем иметь приближенную формулу:

$$F_0 \cdot \Delta r_0 + F_1 \cdot \Delta r_1 + F_2 \cdot \Delta r_2 + \ldots + F_k \cdot \Delta r_k + \ldots + F_{n-1} \cdot \Delta r_{n-1};$$

или:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} F_k \cdot \Delta r_k.$$

Чем меньше промежутки, тем точнее будет формула; начнем увеличивать число промежутков. Обозначив всю работу через $U$ и переходя к пределу, имеем:

$$U = \lim\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} F_k \Delta r_k\right]_{\substack{n \to 0 \\ \Delta r_k \to 0}} = \int_{r_0}^{R} F\,dr = mgr_0^2 \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{r^2} = mgr_0^2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{R} = mgr_0 - \frac{mgr_0^2}{R^2}.$$

Такова работа в граммсантиметрах, чтобы удалить тело на расстояние $R$. Подводим теперь $R$ к $\infty$, тогда работа будет равна:

$$\int_{r_0}^{\infty} F\,dr = mgr_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = mgr_0^2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{\infty} = mgr_0.$$

### Упражнения.

Вычислить интегралы:

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$; 2) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^4} = \frac{\pi}{2a^2}$; 3) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2}$; 4) $\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} x\,dx = \frac{1}{2a^2}$;

5) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln 3$; 6) $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$; 7) $\int_0^{\infty} e^{-ax+b}\,dx = 0; a>0$. 8) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$;

$n$ целое больше нуля; $a>0$; положить: $x = tg\,z$.

9) Найти площадь, ограниченную локоном $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$ и осью $OX$.

Ответ: $4\pi a^2$.

b) Понятие о разрыве под'интегральной функции. Введя бесконечные границы, мы расширили понятие "определенного интеграла" и перешли к так называемым несобственным интегралам; теперь сделаем еще шаг в этом направлении и дадим понятие о разрыве под'интегральной функции; этот разрыв возможен или на границах взятого промежутка или в самом промежутке.

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$ $(b>a)$, если под'интегральная функция $f(x)$ разрывается при $x=a$, обращаясь в бесконечность, т.е. $f(a)=\infty$. Возьмем $a+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, причем $\varepsilon$ бесконечно малая величина, тогда получим: $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$; теперь под'интегральная функция будет непрерывна во взятых границах. Первый интеграл можно считать пределом второго интеграла; обозначая первообразную функцию через $\varphi(x)$, имеем:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim\left[\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\right]_{\varepsilon\to 0}=\lim\left\{\left[\varphi(x)\right]_{a+\varepsilon}^b\right\}_{\varepsilon\to 0}$$

Очевидно интеграл будет сходящимся, если первообразная функция непрерывна при $x=a$, - и расходящимся, если первообразная функция разрывается при $x=a$. Поясним сказанное на примерах.

1) $$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}=\lim\left[\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\right]_{\varepsilon\to 0}=\lim\left\{\left[\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]_{1+\varepsilon}^2\right\}_{\varepsilon\to 0}=\frac{3}{2}\lim\left[(2-1)^{\frac{2}{3}}-(1+\varepsilon-1)^{\frac{2}{3}}\right]_{\varepsilon\to 0};$$

$$\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2}\lim\left[1-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right]_{\varepsilon\to 0}=\frac{3}{2};$$

Первообразная функция непрерывна при $x=1$, интеграл - сходящийся.

2) $$\int_0^2\frac{dx}{x^2}=\lim\left[\int_\varepsilon^2\frac{dx}{x^2}\right]_{\varepsilon\to 0}=\lim\left\{\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^2\right\}_{\varepsilon\to 0}=\lim\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon\to 0}$$

Первообразная функция разрывается при $x=0$, интеграл - расходящийся; условно запишем:

$$\int_{-a}^{2}\frac{dx}{x^2}=\infty.$$

Когда под'интегральная функция разрывается при верхней границе $(b>a)$, то, положив $b-\varepsilon$ вместо $b$ где $\varepsilon>0$, причем $\varepsilon$ бесконечно малая величина, получим интеграл $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx$, - случай разрыва будет уже исключен; поэтому считаем:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\left[\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx\right]_{\varepsilon\to 0}=\left\{\left[\varphi(x)\right]_a^{b-\varepsilon}\right\}_{\varepsilon\to 0}$$

Интеграл снова будет сходящимся, если первообразная функция непрерывна при $x=b$, и расходящимся в обратном случае. Возьмем примеры:

1) $\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}}$; под'интегральная функция разрывается при $x=m$, между тем первообразная функция будет при $x=m$ непрерывна и интеграл - сходящийся:

$$\int_0^m\frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}}=\lim\left[\int_0^{m-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{m^2-x^2}}\right]_{\varepsilon\to 0}=\lim\left\{\left[\arcsin\frac{x}{m}\right]_0^{m-\varepsilon}\right\}_{\varepsilon\to 0}=\frac{\pi}{2}.$$

2) $\int_0^2\frac{dx}{2-x}$; здесь и первообразная функция разрывается при $x=2$, - интеграл - расходящийся:

$$\int_0^2\frac{dx}{2-x}=\lim\left[\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{2-x}\right]_{\varepsilon\to 0}=\lim\left\{\left[-\ln(2-x)\right]_0^{2-\varepsilon}\right\}_{\varepsilon\to 0}=\lim\left[-\ln\varepsilon+\ln 2\right]_{\varepsilon\to 0}=\lim\left[\ln\frac{2}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon\to 0};$$

предела нет; условно запишем $\int_0^2\frac{dx}{2-x}=\infty$.

Остается рассмотреть случай, когда под'интегральная функция разрывается при $x=c$, т.е. $f(c)=\infty$, где $a<c<b$; здесь искомый интеграл можно рассматривать как предел, к которому стремится сумма:

$$\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{c+\omega}^{b}f(x)\,dx \qquad (1).$$

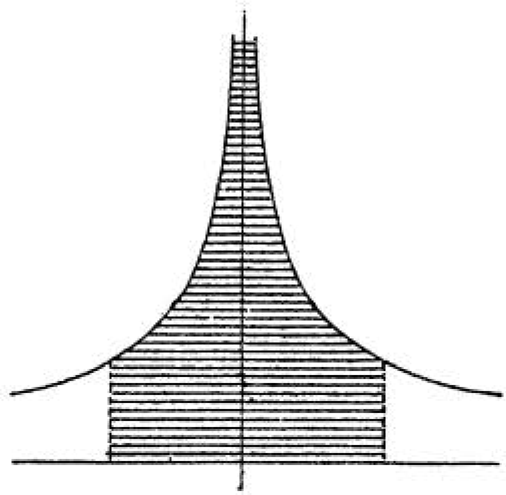
где $\varepsilon>0$ и $\omega>0$, причем $\varepsilon$ и $\omega$ бесконечно мамые величины. Здесь снова интеграл вполне определенным будет только в том случае, если первообразная функция непрерывна при $x=c$.

Поясним сказанное на примерах.

1) $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$; подинтегральная функция разрывается при $x=0$, но первообразная функция $3x^{\frac{1}{3}}$ остается непрерывной при $x=0$ и интеграл будет сходящимся:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}=\left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{+1}=6.$$

Хотя кривая $y=x^{-\frac{2}{3}}$ при приближении $x$ к $0$ уходит в бесконечность (черт. 89), но она имеет определенную площадь между ординатами, соответствующими абсциссам $x=-1$ и $x=1$.



Черт. 89.

2) $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}$ первообразная функция $\left(-\frac{1}{x}\right)$ обращается в бесконечность при $x=0$ интеграл будет расходящимся; кривая $\frac{1}{x^2}$ в том же промежутке, как и раньше рассмотренная кривая, конечной площади не имеет.

3) $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$, где $a>0$ и $b>0$; подинтегральная функция разрывается при $x=0$.

Руководясь (выр. I) составим сумму:

$$\int_{-a}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{0+\omega}^{b}\frac{dx}{x},-$$

или:

$$\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\omega}^{b}\frac{dx}{x},$$

причем попрежнему $\varepsilon$ и $\omega$ бесконечно малые ($\varepsilon>0$ и $\omega>0$). Искомый интеграл будем рассматривать, как предел составленной суммы:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=\lim\left[\int_{\omega}^{b}\frac{dx}{x}+\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}\right]_{\substack{\omega\to 0\\ \varepsilon\to 0}}. \qquad (2).$$

Второй интеграл правой части преобразуем, взяв подстановку: $x=-t$; $dx=-dt$; для новых границ имеем:

$$x_1=-t_1;\quad -a=-t_1;\quad t_1=a;$$
$$x_2=-t_2;\quad -\varepsilon=-t_2;\quad t_2=\varepsilon;$$

итак: $\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}=\int_{a}^{\varepsilon}\frac{dt}{t}$, и по основному свойству 1) $\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}=\int_{a}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}$.

Принимая во внимание полученный результат, выр. (2) перепишем так:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=\lim\left[\int_{\omega}^{b}\frac{dx}{x}+\int_{a}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}\right]_{\substack{\omega\to 0\\ \varepsilon\to 0}};$$

откуда:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=\lim\left[\ln b-\ln\omega+\ln\varepsilon-\ln a\right]_{\substack{\omega\to 0\\ \varepsilon\to 0}};$$

или

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=\lim\left[\ln\frac{b}{a}+\ln\frac{\varepsilon}{\omega}\right]_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \omega\to 0}}=\ln\frac{b}{a}+\lim\left[\ln\frac{\varepsilon}{\omega}\right]_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \omega\to 0}}.$$

Оказывается, что предел составленной нами суммы зависит от того закона, по которому $\varepsilon$ и $\omega$ стремятся к нулю.

Предел $\ln\frac{\varepsilon}{\omega}$ величина неопределенная; поэтому и интеграл $\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}$ число неопределенное.

При $\varepsilon=\omega$ получим, так называемое, <u>главное значение интеграла</u>, которое будет:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=\ln\frac{b}{a}+\lim\left[\ln\frac{\varepsilon}{\omega}\right]_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \omega\to 0}}=\ln\frac{b}{a}+\lim\left[\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right]_{\varepsilon\to 0};$$

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x}=\ln\frac{b}{a}+\ln 1=\ln\frac{b}{a}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Не обращая внимания на разрыв под'интегральной функции можно притти к неверным выводам. Пусть требуется найти интеграл $\int_0^{3a}\frac{dx}{(x-a)^2}$, где $a>0$; под'интегральная функция разрывается при $x=a$, то же самое относится и к первообразной функции: $-\frac{1}{x-a}$. Производя вычисления, не обращая внимания на разрыв, получим явно нелепый результат:

$$\left[-\frac{1}{x-a}\right]_0^{3a}=-\frac{3}{2a}.$$

Так как под'интегральная функция все время остается положительной и по условию $3a>0$, то в силу основного свойства 3) (см.стр. 111) интеграл должен быть положительным. В данном случае, как можете убедиться сами, интеграл расходящийся.

Упражнения (для желающих).

1) $\int_0^1\frac{dx}{x}$; расходящийся; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctg\,x\,dx$; расходящийся;

3) $\int_a^{2a}\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=ln(2+\sqrt{3})$; 4) $\int_0^{3a}\frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}}=9a^{\frac{2}{3}}$.

## § 30. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

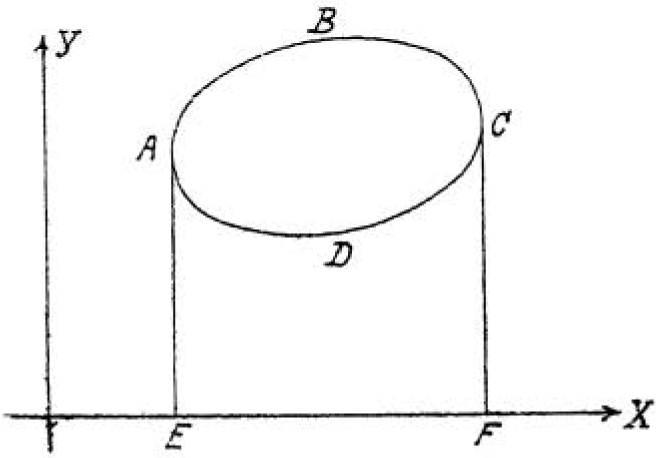
Мы видели, что площадь, ограниченная двумя ординатами, отрезком оси абсцисс и частью кривой $y=f(x)$, выражается интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx,$$

где $a$ и $b$ суть абсциссы крайних точек кривой, а

$$y=f(x)$$

есть уравнение кривой в декартовых координатах. Если же надо вычислить площадь, ограниченную замкнутой кривой (черт. 90) $ABCD$, которая пересекается каждой прямой параллельной оси $OY$, не более чем в двух точ-




Черт. 90.

ках, то приходится разбивать кривую на части, проведя касательные к кривой $AE$ и $CF$ параллельные оси $OY$, и вычислять искомую площадь, как разность площадей $EABCF$ и $EADCF$.

Если уравнения кривых $ABC$ и $ADC$ будут соответственно

$$y_1=f_1(x) \quad \text{и} \quad y_2=f_2(x),$$

а абсциссы точек $A$ и $C$ обозначим через $a$ и $b$ то искомая площадь выразится интегралом:

$$\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]dx=\int_a^b(y_1-y_2)\,dx.$$

В том случае, когда кривая пересекается некоторыми прямыми параллельными оси $OY$ более чем в двух точках, разбиваем эту кривую на части так, чтобы каждая часть пересекалась не больше, чем в двух точках с каждой прямой параллельной оси $OY$, вычисляем отдельно площади, ограниченные частями кривой, и результаты складываем.

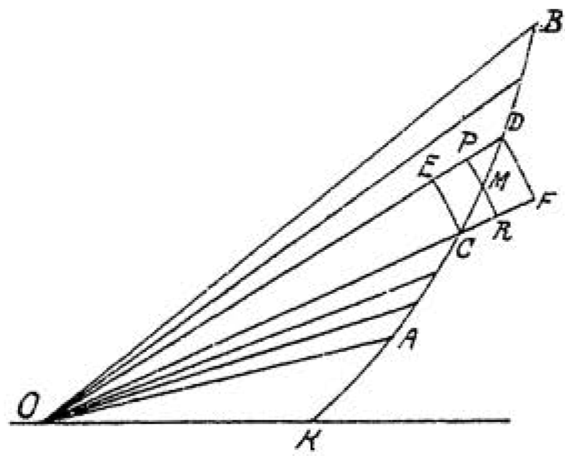
Посмотрим теперь, как же вычисляется площадь, ограниченная кривой, если уравнение кривой задано в полярных координатах. Здесь в качестве основного случая, к которому будем потом приводить все остальные, возьмем случай площади, ограниченной частью кривой $AB$ (черт.91) и двумя радиусами векторами $OA$ и $OB$ ( площадь сектора). Пусть нам дано полярное уравнение кривой $AB$

$$r = f(\varphi),$$

где $f(\varphi)$ непрерывная и однозначная функция от $\varphi$, и даны полярные углы точек $A$ и $B$:

$$\angle KOA = \varphi_0$$

$$\angle KOB = \varphi_1.$$



Черт. 91.

Для вычисления искомой площади воспользуемся методом, весьма характерным для интегрального исчисления, методом, которым мы уже пользовались и будем в дальнейшем пользоваться для решения целого ряда задач. Разобьем площадь нашего сектора $AOB$ на $n$ частей радиусами-векторами, соединяющими различные точки кривой $ACB$ с полюсом $O$ (см.черт. 91). Обозначим площади полученных таким образом секторов соответственно через

$$\Delta Q_1; \quad \Delta Q_2; \quad \Delta Q_3; \ldots\ldots \Delta Q_i \ldots\ldots \Delta Q_n.$$

Тогда, очевидно, вся искомая площадь

$$Q=\sum_{i=1}^{i=n}\Delta Q_i$$

Рассмотрим теперь подробнее площадь $\Delta Q_i$ одного из этих секторов. Пусть это будет площадь сектора $COD$.

Для вычисления площади $\Delta Q_i$ проведем из полюса $O$ две дуги окружности, соответствующие центральному углу $DOC$, радиусы которых равны соответственно наибольшему и наименьшему из радиусов векторов точек дуги $DC$. Допустим для простоты, что наименьший радиус вектор будет $OC$, а наибольший будет $OD$ (см.черт. 91).

Площадь $\Delta Q_i$, очевидно, будет заключаться между площадями круговых секторов $OCE$ и $ODF$. Обозначим угол $\angle COD$ через $\Delta\varphi_i$, радиус $OC$ через $r_i$, радиус $OD$ через $r_i+\Delta r_i$ Тогда площадь сектора $OCE$ равна $\frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i$ и площадь сектора $OFD$ равна:

$$\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\varphi_i$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i<\Delta Q_i<\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\varphi_i.$$

Выберем теперь между точками $D$ и $C$ произвольную точку $M$.

Пусть ее радиус вектор $OM=\rho_i$. Проведем из полюса дугу окружности $PR$ через точку $M$ радиусом $\rho_i$ с центральным углом $\Delta\varphi_i$, тогда площадь сектора $OPR$ также будет заключаться между площадями секторов $OCE$ и $ODF$. При достаточно малом $\Delta\varphi_i$ площади секторов $OCE$ и $ODF$ будут отличаться друг от друга на величину бесконечно малую, и мы можем, следовательно, считать $\Delta Q_i$ приближенно равным площади сектора $OPR$, т.е.

$$\Delta Q_i\approx\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i.$$

Такого рода рассуждения можно привести для любого из тех секторов, на которые разбился сектор $AOB$ и, следовательно, можно считать:

$$Q=\sum_{i=1}^{i=n}\Delta Q_i\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\rho_i^2\Delta\varphi_i.$$

Это равенство, конечно, приближенное, но оно будет тем точнее, чем больше мы возьмем число частичных секторов $n$ и чем меньше будут углы $\Delta\varphi_i$. Оно станет совершенно точным, если мы в правой части возьмем предел стоящей там суммы при условии, что число $n$ будет возрастать беспредельно:

$$Q=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}\rho_i^2\Delta\varphi_i.$$

Этот предел, как известно, равняется интегралу

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}r^2 d\varphi,$$

где $r$ данная нам функция от $\varphi$

$$r=f(\varphi).$$

Следовательно, искомая площадь

$$Q=\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}r^2 d\varphi.$$

Этот вывод нельзя считать достаточно математически строгим. Формулу эту можно вывести более строго еще так:

так как $\frac{1}{2}r_i^2\Delta\varphi_i<\Delta Q_i<\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\Delta\varphi_i$,

то можно выбрать так точку $M$ между точками $C$ и $D$, чтобы $\Delta Q_i$ в точности равнялось $\frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i$, где через $\rho_i$ обозначен радиус-вектор точки $M$.

Это всегда можно сделать, так как всякая непрерывная функция принимает любое промежуточное значение. Отсюда следует, что

$$Q=\sum_{i=1}^{i=n}\Delta Q_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\rho_i^2\Delta\varphi_i.$$

Но эта формула не решает задачи, потому что нам неизвестны $\rho_i$. Выберем тогда на дуге $CD$ между точками $C$ и $D$ совершенно произвольную точку $M_1$ и пусть ее радиус вектор будет $R_i$. Проделаем это опять для всех частичных секторов и составим сумму $\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} R_i^2 \Delta\varphi_i$.

Эта сумма, конечно, не равняется $Q$; но в теории определенных интегралов доказывается, что пределы такого рода сумм, где $R_i$ есть значение данной функции для некоторого значения $\varphi$, лежащего в промежутке $\Delta\varphi_i$, вычисленные в предположении, что число $n$ беспредельно растет, все равны и не зависят от того, каким способом мы будем разбивать промежуток на части и как будем выбирать промежуточные точки $M_1$ (см. § 27). Следовательно:

$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} R_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum \rho_i^2 \Delta\varphi_i .$$

Но последняя сумма равна $Q$ и ее предел также равен $Q$, так что

$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} R_i^2 \Delta\varphi_i = Q .$$

В теории определенных интегралов также доказывается, что предел такой суммы равен определенному интегралу:

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \, d\varphi .$$

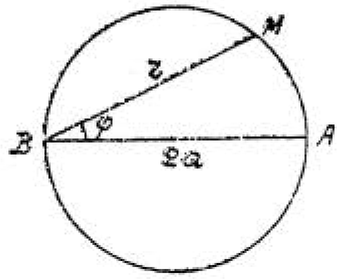
Следовательно:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \, d\varphi$$

результат, совпадающий с результатом, полученным раньше, менее строгим путем.

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную окружностью: $r = 2a\cos\varphi$ (площадь круга-черт. 92).

Вследствие симметрии фигуры относительно полярной оси можно ограничиться вычислением площади верхней половины. Точка $M$ описывает полуокружность $AMB$ тогда, когда полярный угол меняется от $0$ до $\frac{\pi}{2}$.



Черт. 92.

Следовательно, площадь полукруга:

$$\frac{Q}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\varphi$$

и вся площадь $Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, d\varphi$.

Подставив вместо $r$ его выражение через $\varphi$, т.е. $2a\cos\varphi$ получим:

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^2\varphi\, d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi,$$

но

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$ см.§29 п.1

Следовательно,

$$Q = 4a^2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi a^2.$$

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную кривой

$$r = a(1+\cos\varphi).$$

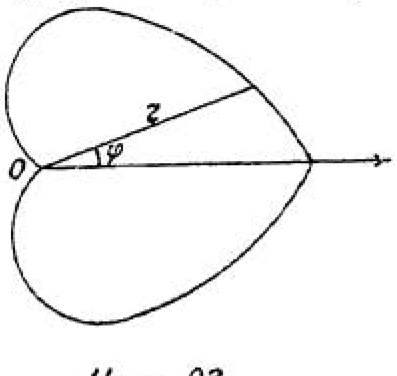
Эта кривая называется кардиоидой. Посмотрим сначала что это за кривая. Для этого построим несколько точек этой кривой, составив таблицу соответствующих значений полярного угла $\varphi$ и радиуса-вектора $r$.

| $\varphi$ | $r$ |
|---|---|
| $0$ | $2a$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 1,8a$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $a\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 1,7a$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $a\left(1+\frac{1}{2}\right)=1,5a$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $a$ |
| $\frac{2\pi}{3}$ | $a\left(1-\frac{1}{2}\right)=0,5a$ |
| $\frac{3\pi}{4}$ | $a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 0,3a$ |
| $\frac{5\pi}{6}$ | $a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0,1a$ |
| $\pi$ | $0$ |

Мы видим, что $r$ все время убывает.

Построив по этим полярным координатам точки и соединив их кривой, получим верхнюю половину кривой, изображенной на чертеже 93. Так как замена $\varphi$ на $-\varphi$ не изменяет величины $r$, то кривая симметрична относительно полярной оси.

Приняв это во внимание, получим кривую, изображенную на чертеже 93.



Черт. 93.

Вследствие симметрии фигуры, относительно полярной оси, можем опять вычислить площадь верхней половины фигуры и результат удвоить. Точка описывает верхнюю половину кривой, когда $\varphi$ меняется от $0$ до $\pi$. Следовательно, если обозначим искомую площадь через $Q$, то

$$\frac{Q}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,d\varphi,$$

а вся площадь

$$Q=\int_0^{\pi} r^2\,d\varphi.$$

Подставив вместо $r$ его выражение из уравнения кривой, получим:

$$Q=\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi=4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся подстановкой

$$\frac{\varphi}{2}=z;$$
$$d\varphi=2dz;$$

если $\varphi=0$, то и $z=0$, а если $\varphi=\pi$, то $z=\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$4a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 z\,dz.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 z\,dz=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi.$$

(см. § 29, п. I).

Отсюда

$$Q=8a^2\cdot\frac{3}{16}\pi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

## Примеры для упражнения.

I) Вычислить площадь лемнискаты

$$r^2=a^2\cos 2\varphi.$$

Ответ: $a^2$.

2) Вычислить площадь трилистника

$$r=a\cos 3\varphi.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^2}{4}$.

3) Вычислить площадь, ограниченную полярной осью и вторым и третьим оборотом спирали

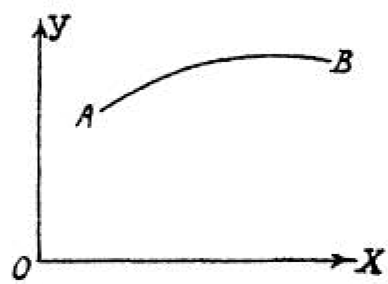
$$r=a\varphi.$$

Ответ: $16\pi^3a^2$.

Указание. При решении каждой задачи необходимо предварительно построить соответствующую кривую.

## § 31. СПРЯМЛЕНИЕ ДУГ.

Пусть нам надо вычислить длину дуги кривой $AB$ (черт. 94). Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$ в прямоугольных декартовых координатах, причем в точке $A$ $x=a$, а в точке $B$– $x=b$.



Черт. 94.

В § 21 была выведена формула для дифференциала дуги:

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\cdot dx.$$

Проинтегрировав это выражение в пределах от $a$ до $b$, получим длину дуги $AB$:

$$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\cdot dx.$$

Пусть теперь кривая задана уравнениями в параметрической форме

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

причем для точки $A \ldots t=t_0$, а для точки $B \ldots t=t_1$. Тогда воспользуемся другим выражением для дифференциала дуги:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

откуда:

$$S=\int_0^{t_1}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Пусть, наконец, кривая задана уравнением в полярных координатах $r=f(\varphi)$. Составим выражение для дифференциала дуги в полярных координатах. Для этого вспомним формулы перехода от прямоугольных координат к полярным:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Откуда:

$$dx=\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi,$$

$$dy=\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi, \qquad \text{и}$$

$$ds^2=dx^2+dy^2=(\cos\varphi\,dr-r\sin\varphi\,d\varphi)^2+(\sin\varphi\,dr+r\cos\varphi\,d\varphi)^2.$$

Раскрыв скобки и упростив, получим

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2=\left\{[f'(\varphi)]^2+[f(\varphi)]^2\right\}d\varphi^2$$

и

$$ds=\sqrt{[f'(\varphi)]^2+[f(\varphi)]^2}\,d\varphi$$

Если в точке $A\ldots\ldots\varphi=\varphi_0$ и в точке $B\ldots\varphi=\varphi_1$, то

$$S=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{[f'(\varphi)]^2+[f(\varphi)]^2}\,d\varphi.$$

При пользовании всеми формулами настоящего параграфа для вычисления $S$, необходимо учесть следующее весьма важное обстоятельство: при вычислении $ds$ нам приходится извлекать квадратный корень. Знак необходимо выбирать так, чтобы $ds$ было положительным, потому что положительное направление отсчета дуг выбирается так, чтобы дуга возрастала вместе с возрастанием независимой переменной. Если в промежутке интегрирования выражение для $ds$ меняет знак, то необходимо разбить кривую на такие части, чтобы в пределах каждой части выражение для $ds$ сохраняло постоянный знак, вычислить длину каждой части и результаты сложить.

Ниже мы увидим это на примере.

Пример I. Вычислить длину кардиоиды $r=a(1+\cos\varphi)$ (черт. 93) (см. § 30, пример 2).

$$dr=-a\sin\varphi\, d\varphi;$$

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2=$$

$$=a^2\sin^2\varphi\, d\varphi^2+a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi^2=$$

$$=a^2(\sin^2\varphi+1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi^2=$$

$$=2a^2(1+\cos\varphi)\,d\varphi^2=4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi^2;$$

$$ds=2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Точка описывает верхнюю половину кардиоиды тогда, когда угол $\varphi$ меняется от $0$ до $\pi$, а нижнюю половину когда угол $\varphi$ меняется от $\pi$ до $2\pi$.

Следовательно, для точек верхней половины кардиоиды $\cos\frac{\varphi}{2}>0$, а для точек нижней половины кардиоиды $\cos\frac{\varphi}{2}<0$. Но так как $ds$ должно быть числом положительным, то для верхней половины кардиоиды

$$ds=+2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

а для нижней половины

$$ds=-2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

и следовательно,

$$S=\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi-\int_{\pi}^{2\pi}2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$
$$=\left[4a\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}-\left[4a\sin\frac{\varphi}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=4a+4a=8a.$$

Тот же результат можно получить, если воспользоваться симметричностью кардиоиды относительно полярной оси. Можно вычислить длину верхней половины кардиоиды и результат удвоить. Тогда получим:

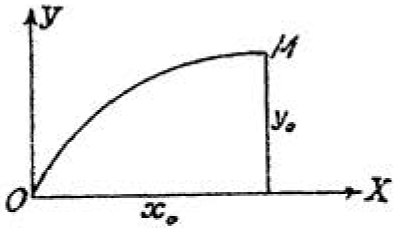
$$S=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=2\left[4a\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}=2.4a=8a.$$

Пример 2. Вычислить длину дуги параболы $y^2=2px$.

Возьмем на параболе точку $M(x_0;y_0)$ (черт.95). Пусть нам надо вычислить длину дуги $OM$.

Из уравнения параболы имеем

$$2ydy=2pdx;$$
$$dx=\frac{ydy}{p};$$
$$ds^2=dy^2+dx^2=dy^2+\frac{y^2dy^2}{p^2}$$
$$ds=\frac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2}\,dy.$$



Черт. 95.

(Здесь удобнее взять за независимую переменную $y$ )

Так как вдоль дуги $OM$ $y$ меняется от $0$ до $y_0$, то искомая длина дуги

$$S=\frac{1}{p}\int_0^{y_0}\sqrt{p^2+y^2}dy$$

Но в § 26 мы видели, что

$$\int\sqrt{p^2+y^2}dy=\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p^2}{2}lg\left\{y+\sqrt{p^2+y^2}\right\}+c.$$

так что

$$S=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{p^2}{2}lg(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]_0^{y_0}=$$

$$=\frac{1}{2p}\left[y_0\sqrt{p^2+y_0^2}+p^2 lg\frac{y_0+\sqrt{p^2+y_0^2}}{p}\right].$$

## Примеры для упражнений.

1) Вычислить длину дуги кривой

$$x=a\cos^3 t$$
$$y=a\sin^3 t.$$

Указание. Кривая эта называется астроидой. Она симметрична относительно осей координат (см.черт.96).

Ответ: $6a$.

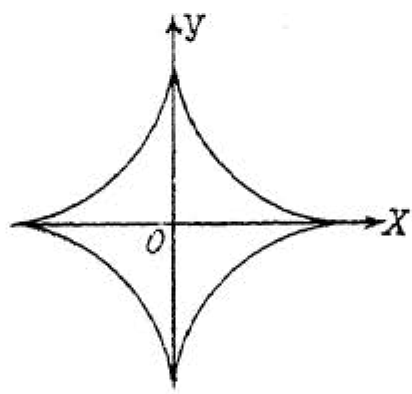
2) Вычислить длину дуги кривой

$$x=a(\cos t+t\sin t)$$
$$y=a(\sin t-t\cos t),$$

содержащейся между $t=0$ и $t=2\pi$.

В дальнейшей части курса будет подробнее рассказано об этой кривой.

Ответ: $2\pi^2 a$.



Черт. 96.

3) Вычислить длину кривой

$$r=2a\cos\varphi \quad (a>0).$$

Ответ: $2\pi a$.

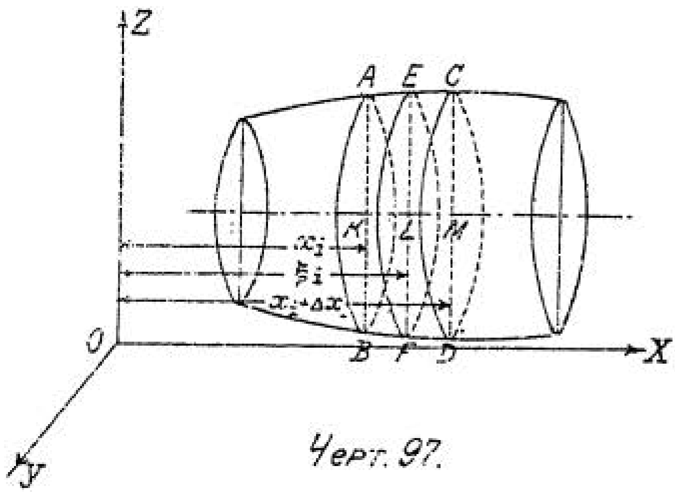
4) Вычислить длину дуги Архимедовой спирали $r=a\varphi$ $(a>0)$, содержащейся между точками, для которых $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_0$.

Ответ: $\frac{a}{2}\varphi_0\sqrt{1+\varphi_0^2}+\frac{a}{2}lg(\varphi_0+\sqrt{1+\varphi_0^2})$.

## § 32. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБ'ЕМА ТЕЛА, КОГДА ИЗВЕСТНЫ ПЛОЩАДИ СЕЧЕНИЙ ЭТОГО ТЕЛА ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ.

В этом параграфе мы займемся вычислением об'ема тела в одном частном случае.

Пусть нам нужно вычислить об'ем некоторого тела, ограниченного кривой поверхностью и двумя параллельными плоскостями (черт. 97).




Черт. 97.

Выберем систему координат так, чтобы плоскость $YOZ$ была параллельна этим двум плоскостям. Пусть нам известны площади сечений нашего тела плоскостями, параллельными плоскости $YOZ$ и перпендикулярными, следовательно, к оси $OX$. Площадь такого сечения, очевидно, будет зависеть от того, на каком расстоянии от плоскости $YOZ$ будет находиться секущая плоскость, т.е. эта площадь будет функцией от $x$.

Согласно сказанному выше, нам известна эта функция от $x$. Пусть она будет $F(x)$.

Пусть еще расстояния от пограничных плоскостей до плоскости $YOZ$ будут $a$ и $b$.

Покажем, как при этих условиях вычислить об'ем данного тела.

Разделим расстояние между двумя пограничными плоскостями на $n$ частей и проведем через точки деления плоскости параллельные плоскости $YOZ$. Эти плоскости разобьют искомый об'ем на $n$ частей. Если обозначим об'ем одной из этих частей через $V_i$, то весь об'ем

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} V_i .$$

Рассмотрим теперь одну из частей нашего об'ема $V_i$, находящуюся между двумя плоскостями $AB$ и $CD$, удаленными от плоскости $YOZ$, соответственно на $x_i$ и $x_i+\Delta x_i$ /см.черт.97/.

Выберем какое-нибудь число $\xi_i$ так чтобы оно заключалось между $x_i$ и $x_i+\Delta x_i$, т.е. чтобы было:

$$x_i < \xi_i < x_i + \Delta x_i .$$

Если провести плоскость $EF$ параллельную плоскости $YOZ$ на расстоянии $\xi_i$ от этой плоскости (см. черт. 97), то она в пересечении с данным телом даст линию, ограничивающую площадь равную $F(\xi_i)$. Построим теперь прямой цилиндр с высотой $\Delta x_i$ и основанием $F(\xi_i)$; его об'ем будет равен $F(\xi_i)\Delta x_i$.

При достаточно малых $\Delta x_i$ об'ем $V_i$ будет отличаться от об'ема цилиндра $F(\xi_i)\Delta x_i$ на бесконечно малую величину

$$V_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i$$

и

$$V \approx \sum_{i=1}^{i=n} F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Это равенство, конечно, приближенное, но оно будет тем точнее чем больше мы возьмем $n$ и чем меньше будут $\Delta x_i$. Равенство это станет совершенно точным, если мы в правой части возьмем предел стоящей там суммы при беспредельном возрастании числа $n$.

Следовательно,

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n}F(\xi_i)\Delta x_i,$$

т.е.

$$V=\int_a^b F(x)\,dx. \qquad (1).$$

На этом примере мы опять ясно видим диалектичность основного метода интегрального исчисления. Для того, чтобы найти целый об'ем, мы разбиваем его на множество частей, а затем опять от этого множества частей переходим к единому целому (подробнее об этом см. § 27).

Совершенно аналогично решается задача в том случае, когда известны площади сечений тела плоскостями, перпендикулярными другим координатным осям. Если, например, обозначим площади сечения тела плоскостями перпендикулярными к оси $OY$ через $F_1(y)$, а площади сечений плоскостями перпендикулярными к оси $OZ$ через $F_2(z)$, то при помощи таких же рассуждений, как и раньше, можно убедиться, что об'ем $V$ выражается интегралом

$$V=\int_{a_1}^{b_1} F_1(y)\,dy,$$

где через $a_1$ и $b_1$ обозначены расстояния от плоскостей параллельных плоскостям $XOZ$ и служащих границами данного тела до плоскости $XOZ$.

Точно также убедимся, что

$$V=\int_{a_2}^{b_2} F_2(z)\,dz,$$

где через $a_2$ и $b_2$ уже обозначены расстояния от плоскостей, служащих границами данного тела и параллельных плоскости $YOX$, до этой плоскости.

Пример. Вычислить об'ем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

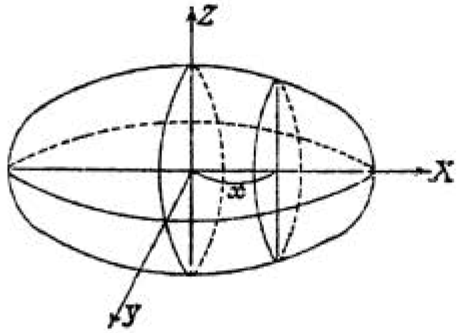
Плоскость, отстоящая от плоскости $YOZ$ на расстоянии $x$, (где $x$ известное нам число) пересекает эллипсоид по некоторому эллипсу ( черт. 98).

Проекция этого эллипса на плоскость $YOZ$ есть также эллипс и имеет уравнение

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

или:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$



Черт. 98.

Полуоси этого эллипса соответственно равны

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

и площадь его равна:

$$\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);$$

а так как площадь сечения равна площади проекции в силу того, что мы проектируем на плоскость параллельную той плоскости, в которой лежит проектируемая фигура, то в данном случае

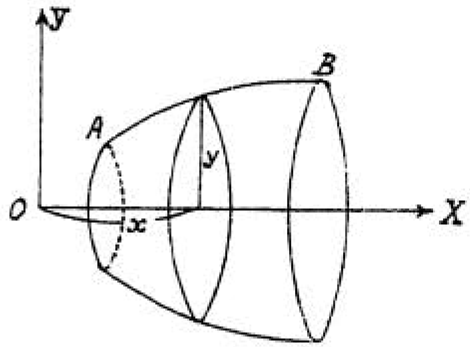
$$F(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Значит об'ем эллипсоида равен

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=2\int_{0}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=$$

$$= 2\pi bc\left[x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{a^2}\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Формула (I) стр.176 может также служить для вычисления об'ема тел вращения. Пусть дуга кривой $AB$, уравнение которой есть $y=f(x)$, вращается вокруг оси $OX$ (черт. 99).




Черт. 99.

Вычислим об'ем тела, ограниченного кривой поверхностью, получаемой при этом. Всякая плоскость, перпендикулярная оси $OX$ отстоящая от плоскости $YOZ$ на расстоянии $x$, в сечении с данным телом дает круг, радиус которого равен ординате $y$ соответствующей точки кривой, и площадь которого равна $\pi y^2$.

Следовательно, в данном случае

$$F(x)=\pi y^2,$$

где под $y$ подразумевается функция $f(x)$, взятая из уравнения кривой.

Если в точке $A \dots x=a$ и в точке $B \dots x=b$, то об'ем

$$V=\pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.$$

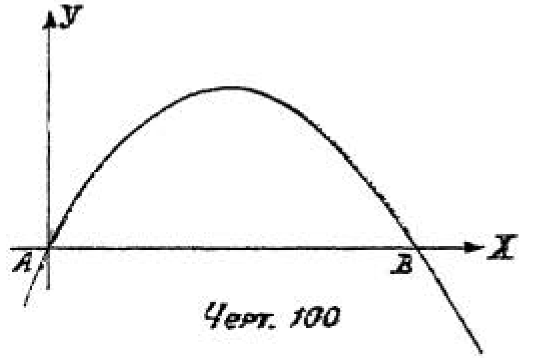
В том случае, когда кривая вращается вокруг другой оси, в эту формулу надо внести соответствующие изменения. Например, если кривая будет вращаться вокруг оси $OY$, то под знаком интеграла будет выражение $x^2 dy$, где $x$ надо выразить через $y$ из уравнения кривой, а границами интеграла будут границы изменения переменной $y$.

Пример I. Вычислить об'ем, образуемый вращением вокруг оси $OX$ той части параболы

$$y=2x-x^2,$$

которая лежит над осью $OX$ (черт.100).

Предлагаем читателю подробнее исследовать эту функцию и убедиться, что кривая расположена так, как указано на чертеже 100.


Черт. 100

Найдем сначала точки пересечения параболы с осью $OX$.

В этих точках $y=0$ или
$2x-x^2=0$; $x(2-x)=0$,
откуда либо $x=0$ либо $x=2$.

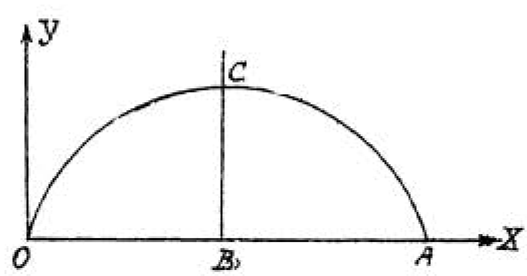
Очевидно, $x=0$ в точке $A$ и $x=2$ в точке $B$; следовательно искомый об'ем

$$V=\pi\int_0^2 y^2\,dx=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2\,dx=\frac{16}{15}\pi.$$

Пример 2. Вычислить об'ем тела, образуемого вращением одной арки циклоиды:

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

вокруг оси $OX$ (черт. 101).


Черт. 101.

Вследствие того, что фигура симметрична относительно прямой $BC$, перпендикулярной к оси $OX$ и проходящей через высшую точку циклоиды, можно вычислить об'ем, получаемый при вращении дуги $OC$ вокруг оси $OX$ и результат удвоить.

В точке $O$ имеем $x=0$, в точке $C$ – $x=OB$. но $OB$, очевидно, равно половине окружности катящегося круга (см. § 20), т.е. $OB=\pi a$.

Следовательно,

$$V = 2\pi\int_0^{\pi a} y^2\, dx.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся параметрическими уравнениями циклоиды, т.е. сделаем подстановку

$$x = a(t - \sin t).$$

Тогда, согласно уравнению кривой, $y = a(1-\cos t)$.

Кроме того имеем $dx = a(1-\cos t)\,dt$.

В точке $O \ldots\ldots t = 0$, а в точке $C \ldots\ldots t = \pi$.

Значит

$$V = 2\pi\int_0^{\pi} a^3(1-\cos t)^3\, dt$$

или:

$$V = 16\pi a^3\int_0^{\pi} \sin^6\frac{t}{2}\, dt.$$

Сделаем подстановку

$$\frac{t}{2} = z; \qquad dt = 2dz.$$

при $t = 0$; $z = 0$; $\qquad t = \pi$; $z = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$V = 32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z\, dz.$$

Согласно формуле § 29,

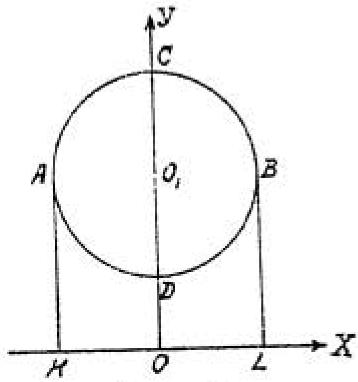
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z\, dz = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$$

откуда:

$$\underline{V = 32\pi a^3\frac{5\pi}{32} = 5\pi^2 a^3.}$$

Пример 3. Вычислить об'ем тора. Тором называется тело, которое получается при вращении круга вокруг оси, лежащей в той же плоскости вне этого круга.

Пусть нам надо вычислить об'ем, получаемый при вращении круга $ADBC$ (черт. 102) вокруг какой-нибудь оси, лежащей вне окружности. Выберем систему координат так, чтобы ось $OY$ проходила через центр окружности $O_1$, а ось $OX$ совпадала с осью вращения.



Черт. 102.

Пусть расстояние от центра $O_1$ до оси $OX$ равно $h$. Тогда уравнение окружности будет

$$x^2+(y-h)^2=R^2,$$

где $R$ есть радиус окружности.

Решив это уравнение относительно $y$, получим:

$$y=h\pm\sqrt{R^2-x^2}.$$

Очевидно, для точек полуокружности $ACB$:

$$y=y_1=h+\sqrt{R^2-x^2},$$

а для точек полуокружности $ADB$

$$y=y_2=h-\sqrt{R^2-x^2}.$$

Чтобы вычислить искомый об'ем, надо от об'ема, образуемого при вращении фигуры $KACBL$, отнять об'ем, образуемый при вращении фигуры $KADBL$. Так как в точке $A$ имеем $x=-R$, а в точке $B$ .... $x=+R$, то искомый об'ем

$$V=\pi\int_{-R}^{+R}y_1^2\,dx-\pi\int_{-R}^{+R}y_2^2\,dx=$$

$$=\pi\int_{-R}^{+R}(y_1^2-y_2^2)\,dx=\pi\int_{-R}^{+R}(y_1+y_2)(y_1-y_2)\,dx.$$

Но
$$y_1+y_2=2h; \qquad y_1-y_2=2\sqrt{R^2-x^2}.$$
Следовательно
$$V=4\pi h\int_{-R}^{+R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=$$
$$=8\pi h\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

В параграфе 26 мы видели, что
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$
Следовательно
$$8\pi h\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=$$
$$=8\pi h\left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}\,dx+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R=$$
$$=8\pi h\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi^2R^2h.$$

Полученный результат можно еще представить в таком виде
$$V=2\pi^2hR^2=\pi R^2\cdot 2\pi h.$$

Это значит, что искомый об'ем равен произведению площади вращающегося круга на длину окружности, описываемую центром этого круга. Этот результат есть частный случай одной их теорем Гюльдэна, с которыми мы познакомимся впоследствии.

## Примеры для упражнений.

1) Вычислить об'ем части однополого гиперболоида
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

заключенной между плоскостями

$$z=0; \quad z=c.$$

Ответ: $\frac{4}{3}\pi abc.$

2) Вычислить об'ем тела, полученного при вращении астроиды

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$$

вокруг оси $OX$ (см. § 31, пример 1).

Ответ: $\frac{32}{105}\pi a^3.$

3) Вычислить об'ем, образуемый вращением площади, ограниченной одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и осью $OX$ вокруг оси $OX$.

Ответ: $\frac{\pi^2}{2}.$

4) Вычислить об'ем тела, образующегося от вращения вокруг оси $OY$ площади, ограниченной параболой $y^2=4ax$ и прямой $x=a$.

Указание. Искомый об'ем равен разности об'емов, получаемых от вращения вокруг оси $OY$ прямой и параболы.

Ответ: $\frac{16}{5}\pi a^3.$

5) Вычислить об'емы, получающиеся при вращении эллипса вокруг оси $OX$ и $OY$ (эллипсоиды вращения).

Ответ:

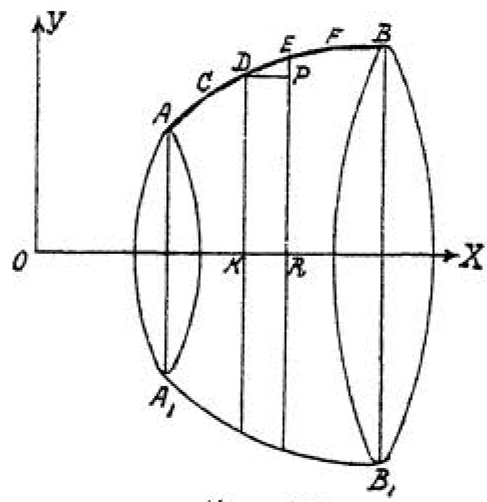
$$\frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ и } \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

## § 33. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о вычислении площади кривой поверхности также в одном частном случае. Пусть нам дана часть некоторой кривой $AB$, расположенная над осью $OX$, и пусть уравнение этой кривой есть $y=f(x)$.

Абсциссу точки $A$ обозначим через $a$, а абсциссу точки $B$ через $b$. Вычислим площадь поверхности, которую описывает кривая $AB$, вращаясь вокруг оси $OX$ (черт. 103).

Впишем в данную кривую какую-нибудь ломаную линию $ACDEFB$, выбрав на кривой произвольно несколько точек. При вращении вокруг оси $OX$, эта ломаная линия описывает некоторую кривую поверхность, площадь которой равняется сумме боковых поверхностей нескольких усеченных конусов (в частном случае могут быть также конусы и цилиндры).




Черт. 103.

При увеличении числа $n$ отрезков этой ломаной линии, площадь поверхности, описываемой ею $-S_n$ очевидно будет меняться.

Искомая площадь поверхности, описываемой кривой, $S$ равняется пределу площади поверхности $S_n$ вычисленному в предположении, что число отрезков ломаной $n$ беспредельно растет, а длина каждого отрезка стремится к нулю:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n .$$

Чтобы вычислить искомый предел, рассмотрим поверхность, описываемую одним отрезком ломаной $DE$; обозначим ее через $S_i$.

Пусть

$$DK = y_i; \quad ER = y_i + \Delta y_i; \quad KR = \Delta x_i.$$

Отрезок $DE$ вращаясь описывает поверхность усеченного конуса, радиусы оснований которого равны соответственно $y_i$ и $y_i + \Delta y_i$.

Образующая этого усеченного конуса:

$$DE = \sqrt{DP^2 + PE^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2};$$

боковая поверхность усеченного конуса $S_i$, очевидно равна

$$S_i = \pi (y_i + y_i + \Delta y_i) \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} =$$
$$= \pi (2y_i + \Delta y_i) \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Вынесем $\Delta x_i$ из под знака корня; вынесем кроме этого еще за скобки $2$; тогда получим:

$$S_i = 2\pi \left(y_i + \frac{\Delta y_i}{2}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

Пусть теперь число отрезков $n$ ломаной беспредельно возрастает, а длина каждого отрезка стремится к нулю. $\Delta x_i$ при этом будет стремиться к нулю. Тогда в силу непрерывности функции $y = f(x)$ приращение $\Delta y_i$ будет также стремиться к нулю; $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ будет отличаться на бесконечно малую величину от значения производной $y_i'$ в точке $D$, и все выражение для $S_i$ можно будет представить в таком виде:

$$S_i = 2\pi \left[ y_i \sqrt{1 + y_i'^2} + \varepsilon_i \right] \Delta x_i ,$$

где $\varepsilon_i$ есть величина бесконечно малая при бесконечно малом $\Delta x_i$. Поверхность, описываемая всей ломаной линией:

$$S_n=\sum_{i=1}^{i=n} S_i=\sum_{i=1}^{i=n} 2\pi\left[y_i\sqrt{1+y_i'^2}+\varepsilon_i\right]\Delta x_i=$$
$$=2\pi\sum_{i=1}^{i=n} y_i\sqrt{1+y_i'^2}\,\Delta x_i+2\pi\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i\Delta x_i.$$

Искомая площадь кривой поверхности

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=2\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} y_i\sqrt{1+y_i'^2}\,\Delta x_i+$$
$$+2\pi\lim\sum_{i=1}^{i=n}\varepsilon_i\Delta x_i.$$

Так как все $\varepsilon_i$ являются числами бесконечно- малыми, то произведения $\varepsilon_i\Delta x_i$ будут бесконечно малыми высшего порядка, чем числа $\Delta x_i$ и чем слагаемые первой суммы; а поэтому нетрудно убедиться при помощи рассуждений аналогичных рассуждениям параграфа 27, что последний предел равен нулю. Первый же предел равен определенному интегралу

$$2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Следовательно, искомая площадь кривой поверхности:

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Но $\sqrt{1+y'^2}\,dx$ равняется дифференциалу дуги $ds$ (см. § 21).

Поэтому можно под знаком интеграла написать $y\,ds$, причем $ds$ необязательно, конечно, выражать через $dx$; можно за независимую переменную выбрать, например, $y$ или параметр в том случае, когда кривая задана уравнениями в параметрической форме. Пределы интегрирования будут различными в зависимости от того, что мы выберем за независимую переменную. Верхним пределом всегда будет значение независимой переменной, соответствующее точке $B$, а нижним пределом будет значение той же независимой переменной, соответствующее точке $A$. Условимся это записывать таким образом:

$$S_x=\int_{(A)}^{(B)} y\,ds$$

Совершенно так же докажем, что поверхность, получаемая при вращении кривой вокруг оси $OY$, равняется

$$S_y\int_{(A)}^{(B)} x\,ds.$$

<u>Пример I.</u> Вычислить площадь поверхности, описываемой одной аркой циклоиды при вращении вокруг оси $OX$

Уравнения циклоиды в параметрической форме суть:

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$$

Мы уже знаем, что для циклоиды $ds=2a\sin\frac{t}{2}\,dt$, и что точка описывает всю арку циклоиды, когда угол $t$ меняется от $0$ до $2\pi$ (см. § § 20,21). Вследствие известной симметрии циклоиды, можно вычислять площадь поверхности, описываемой половиной арки, и результат удвоить.

Поэтому имеем:

$$S=2\cdot2\pi\int_0^{\pi} y\,ds=4\pi\int_0^{\pi} a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt.$$

Для вычисления $\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt$ воспользуемся подстановкой: $\frac{t}{2}=z$; $dt=2dz$.

Когда $t=0$, то $z=0$; когда $t=\pi$, то $z=\frac{\pi}{2}$

Следовательно,

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 z\, dz$$

Но по известной формуле ( § 29)

$$\int_0^{\pi} \sin^3 z\, dz = \frac{2}{3},$$

откуда:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = \frac{4}{3}$$

и искомая площадь поверхности

$$S = 16\pi a^2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Пример 2. Вычислить площадь поверхности, описываемой кордиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$ при вращении вокруг полярной оси.

Очевидно все тело вращения получается при вращении одной верхней половины кардиоиды вокруг полярной оси.

Мы знаем, что для кардиоиды

$$ds = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi,$$

и что для верхней половины угол $\varphi$ меняется от $0$ до $\pi$.

Отсюда

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} y\, ds,$$

а так как $y = r\sin\varphi = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$,

то:

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sin\varphi\, 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} a.2\cos^2\frac{\varphi}{2} 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi} \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Для вычисления этого интеграла сделаем подстановку

$$\cos\frac{\varphi}{2}=z;\quad -\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=dz;\qquad \sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=-2dz,$$

а так как

$$\cos 0=1 \quad \text{и} \quad \cos\frac{\pi}{2}=0,$$

то:

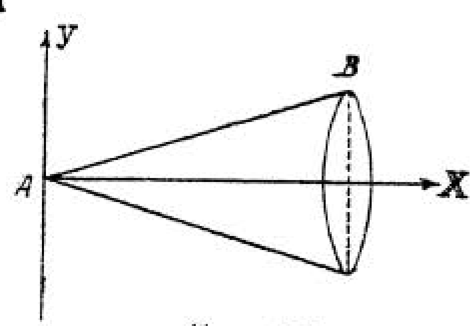
$$S=-32a^2\pi\int_1^0 z^4dz=32\pi a^2\int_0^1 z^4dz=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

## Примеры для упражнений.

1) Вычислить боковую поверхность прямого кругового конуса.

Указание. Надо рассматривать эту поверхность, как поверхность, описываемую при вращении отрезка $AB$ прямой, проходящей через начало координат вокруг оси $OX$ (черт. 104), и считать данными высоту конуса $h$ и радиус основания $r$.

Ответ: $\pi lr$, где $l$ образующая конуса.



Черт 104.

2) Вычислить площадь поверхности, полученной при вращении полуокружности

$$r=2a\cos\varphi$$

вокруг полярной оси (поверхность шара).

Ответ: $4\pi a^2$.

3) Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением астроиды:

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$$

около оси $OX$.

Ответ: $\frac{12}{5}\pi a^2$.

4) Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси $OY$ части кривой $y=1-x^2$, расположенной над осью $OX$.

Указания. Исследовать кривую, сделать чертеж, в этом случае:

$$S=2\pi\int_{(A)}^{(B)} x\,ds.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

## § 34. МОМЕНТ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ.

В теоретической механике под материальной линией подразумевают такую линию, которая, обладая некоторой массой, имеет только одно измерение - длину, но не имеет других измерений. Конечно, в природе нет таких "идеальных" материальных линий, но тем не менее формулы, выведенные для таких линий, дают возможность решать задачи, относящиеся к настоящим материальным линиям.

Это объясняется тем, что на практике часто длина линии настолько преобладает над другими ее измерениями, что роль последних становится очень малой и ими можно пренебречь; результаты, получаемые при этом, достаточно точны для практических целей.

Однородной линией в механике называют материальную линию, обладающую следующим свойством: любой отрезок этой линии, по длине равный единице длины, обладает одной и той же массой. Если обозначим, так называемую, "линейную плотность", т.е. массу такого отрезка (по длине равного единице длины) через $\lambda$, то часть линии длиной $S$ единиц длины будет иметь массу $\lambda S$.

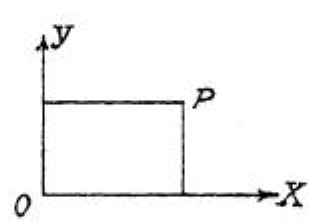
Введем еще некоторые понятия из механики, необходимые для решения той задачи, которую мы хотим разобрать в этом параграфе - вычисления координат центра тяжести однородной материальной линии.

На практике очень часто можно пренебречь размерами тела и считать, что его масса сосредоточена в одной точке. Это обстоятельство является основанием для введения в механику понятия о так называемой материальной точке.

Материальной точкой в механике называют такую точку, которая обладает некоторой массой, но не имеет измерений. Это понятие чисто отвлеченное. В природе таких точек не существует, но тем не менее формулы, выведенные для материальных точек с успехом применяются при решении целого ряда чисто практических задач, потому что во многих случаях оказывается возможным отвлечься от размеров тела.

Моментом материальной точки относительно какой-нибудь оси называется произведение массы этой точки на ее расстояние от оси. Таким образом моментом какой-нибудь точки $P(x,y)$ относительно оси $OX$ (черт.105) называется произведение $my$, где $m$ - масса точки. Это обозначается так $M_x = my$.

Моментом этой же точки относительно оси $Y$ будет произведение: $M_y = mx$.



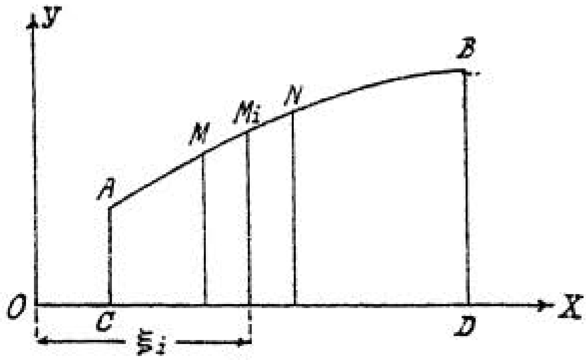
Черт. 105.

Введем еще понятие о моменте линии относительно оси.

Пусть дана часть $AB$ какой-нибудь однородной кривой $y=f(x)$ длины $S$ (черт. 106) Опустим из точек $A$ и $B$ перпендикуляры $AC$ и $BD$ на ось $OX$.

Разделим отрезок $CD$ оси $OX$ на $n$ частей, и в точках деления восставим перпендикуляры к оси $OX$ до пересечения с кривой $AB$. Кривая также разобьется на $n$ частей. Рассмотрим одну такую часть $MN$. Пусть длина этой части равна $\Delta s_i$.

Если обозначим линейную плотность через $\lambda$, то масса части $MN$ будет равна $\lambda \Delta s_i$.



Черт. 106.

Выберем произвольную точку $M_i$ на кривой между точками $M$ и $N$. Пусть абсцисса этой точки равна $\xi_i$. Умножим теперь массу $MN$ т.е. $\lambda \Delta s_i$ на эту абсциссу,- получим $\lambda \xi_i \Delta s_i$.

Проделаем этот процесс для всех частичных дуг, на которые разбилась наша дуга $AB$.

Полученные произведения сложим, получим сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda \xi_i \Delta s_i$$

Предел этой суммы, вычисленный в предположении, что число $n$ частей беспредельно возрастает, а величина каждой части стремится к нулю, называется моментом дуги $AB$ относительно оси $OY$:

$$M_y = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda \xi_i \Delta s_i .$$

Как же вычислить этот предел?

Заменяя приближенно длину каждой из частичных дуг длиной соответствующей хорды, можно при помощи таких же рассуждений, которые приведены в § 33, показать, что этот предел равен интегралу

$$M_y=\lambda\int_{(A)}^{(B)} x\,ds,$$

где $ds$ дифференциал дуги кривой. Совершенно аналогичным путем строится понятие о моменте дуги относительно оси $OX$, и вычисляется ее величина

$$M_x=\lambda\int_{(A)}^{(B)} y\,ds.$$

Теперь мы можем уже приступить к решению задачи о вычислении координат центра тяжести однородной кривой. Вычисление координат центра тяжести основано на одной теореме из механики, которую мы здесь примем без доказательства.

Теорема эта следующая.

Момент всякой системы материальных точек относительно какой-нибудь оси равен моменту центра тяжести этой системы относительно той же оси, вычисленному в предположении, что в центре тяжести сосредоточена вся масса системы.

Однородную линию можно также рассматривать как систему материальных точек, только здесь число точек бесконечно велико; поэтому можно применять эту теорему и к однородной линии.

Пусть нам надо разыскать координаты центра тяжести дуги $AB$ однородной кривой, уравнение которой есть $y=f(x)$ (черт. 107).

Обозначим искомые координаты центра тяжести через $x_c$ и $y_c$. Если обозначим линейную плотность через $\lambda$, то масса дуги $AB$ будет равна $\lambda S$, где $S$ - длина этой дуги.

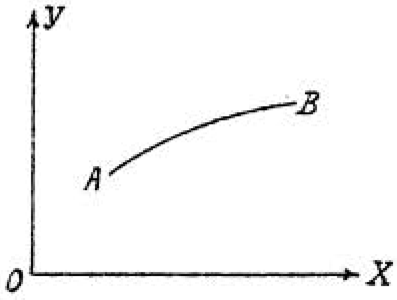
Моменты центра тяжести в том случае, когда в нем будет сосредоточена вся масса дуги, относительно осей координат будут соответственно равны $\lambda S X_c$ и $\lambda S Y$

Согласно сформулированной теореме, эти моменты должны равняться соответственно моментам всей дуги относительно осей координат.

Следовательно:

$$\lambda s X_c = M_y = \lambda \int_{(A)}^{(B)} x\,ds.$$

$$\lambda s Y_c = M_x = \lambda \int_{(A)}^{(B)} y\,ds.$$



Черт. 107.

Отсюда:

$$\boxed{\begin{aligned} X_c &= \frac{\int_{(A)}^{(B)} x\,ds}{S} \\ Y_c &= \frac{\int_{(A)}^{(B)} y\,ds}{S} \end{aligned}} \quad (1).$$

Эти формулы и решают задачу.

<u>Пример.</u> Найти центр тяжести одной арки циклоиды:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Арка циклоиды симметрична относительно прямой, проходящей параллельно оси $OY$ на расстоянии $\pi a$ от этой оси, и поэтому ее центр тяжести лежит на этой оси, т.е.: $X_c = \pi a$.

Для вычисления $Y_c$ воспользуемся второй из формул (I); для циклоиды $ds = 2a \sin\frac{t}{2}dt$ и $S = 8a$ (см. § 31).

Следовательно:

$$Y_c = \frac{\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt}{8a},$$

$$\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,2a\,\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

Сделаем подстановку:

$$\cos\frac{t}{2}=z;\qquad \sin\frac{t}{2}\,dt=-2dz,$$

если

$t=0$, то $z=1$; если $t=2\pi$, то $z=-1$,

тогда:

$$4a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=-8a^2\int_1^{-1}(1-z^2)\,dz=$$

$$=8a^2\int_{-1}^{1}(1-z^2)\,dz=16a^2\int_0^1(1-z^2)\,dz=$$

$$=16a^2\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_0^1=\frac{32}{3}a^2;$$

$$y_c=\frac{32}{3}a^2;\ 8a=\frac{4}{3}a.$$

Из полученных нами формул для вычисления координат центра тяжести какой-нибудь дуги очень легко выводится так называемая первая теорема Гюльдэна.

Мы имеем:

$$y_c=\frac{\int_{(A)}^{(B)}y\,ds}{S};$$

или:

$$S\,y_c=\int_{(A)}^{(B)}y\,ds.$$

Умножим левую и правую части нашего равенства на $2\pi$; получим:

$$2\pi y_c S=2\pi\int_{(A)}^{(B)}y\,ds.$$

но $2\pi\int_{(A)}^{(B)}y\,ds$ есть площадь поверхности тела, образуемого вращением дуги данной кривой вокруг оси $OX$; $2\pi y_c$ есть длина окружности, которую при этом описывает центр тяжести дуги кривой. Следовательно, читая наше равенство справа налево, получим теорему.

Площадь поверхности, описываемой вращением дуги какой-нибудь кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равна произведению длины дуги на длину той окружности, которую при этом вращении описывает центр тяжести этой дуги. Это и есть первая теорема Гюльдэна.

## Примеры для упражнений.

1) Найти центр тяжести полуокружности радиуса $a$, диаметр которой лежит на оси $OX$, а центр совпадает с началом координат.

Вычисление произвести двумя способами: по формулам (I) и пользуясь теоремой Гюльдэна.

Указание: взять уравнения окружности в параметрической форме.

Ответ: $X_c = 0; \quad Y_c = \frac{2a}{\pi}$.

2) Найти центр тяжести полного обвода кардиоиды:

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

при помощи теоремы Гюльдэна.

Ответ: $X_c = \frac{4}{5}a; \quad Y_c = 0.$

## § 35. МОМЕНТ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ.

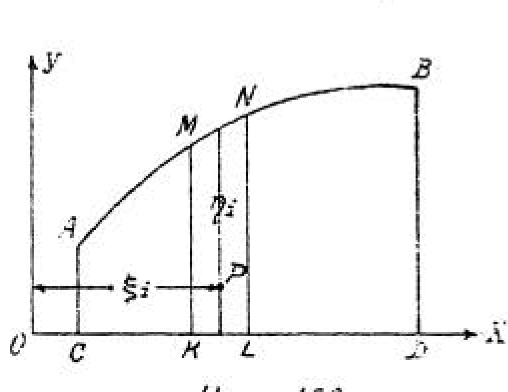
Подобно тому, как рассматриваются в механике такие линии, которые имеют только одно измерение, рассматриваются также и фигуры, у которых нет толщины, а имеются только два измерения: длина и ширина. Основанием для этого служат соображения, аналогичные соображениям, заставляющим рассматривать линии, обладающие только длиной (см. § 34).

Однородной плоской фигурой в механике называют плоскую фигуру, обладающую тем свойством, что любая часть этой фигуры, имеющая площадь равную единице площади, имеет одну и ту же массу. Если мы эту массу, называемую обыкновенно "поверхностной плотностью", обозначим через $\rho$, а площадь всей фигуры через $Q$, то вся масса будет равна:

$$m = \rho Q.$$

Введем еще понятие о моменте площади относительно оси. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную частью $AB$ кривой $y=f(x)$, двумя ординатами $AC$ и $BD$, соответствующими абсциссам $OC=a$ и $OD=b$, и отрезком оси абсцисс ( черт. 108).

Разделим отрезок $CD$ оси абсцисс на $n$ частей и через точки деления проведем прямые параллельные оси $OY$ до пересечения с данной кривой.




Черт. 108.

Данная площадь разобьется на $n$ полосок. Рассмотрим одну такую полосу $KMNL$ Пусть ее площадь равна $\Delta Q_i$ . Выберем внутри этой площади произвольную точку (см.черт. 108). Пусть ее абсцисса равна $\xi_i$.

Составим произведение этой абсциссы $\xi_i$ на массу полоски $\rho\Delta Q_i$, т.е.: $\rho\xi_i\Delta Q_i$ и такого рода произведения составим для всех площадок, на которые разбилась площадь $ABCD$ прямыми параллельными оси $OY$.

Полученные произведения сложим; получим сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} \rho\xi_i \Delta Q_i.$$

При беспредельном возрастании числа $n$ и беспредельном уменьшении ширины каждой полоски, эта сумма будет стремиться к некоторому пределу. Вот этот предел и называется моментом данной площади относительно оси $OY$:

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \rho\xi_i \Delta Q_i.$$

Чтобы вычислить этот предел, заметим, что площадь $\Delta Q_i$ можно приближенно заменить площадью прямоугольника с высотой $\eta_i = f(\xi_i)$ и основанием $\Delta x_i = KL$.

Следовательно:

$$\Delta Q_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

и

$$\sum_{i=1}^{i=n} \rho\xi_i \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{i=n} \rho\xi_i f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

При беспредельном возрастании числа $n$ и беспредельном убывании $\Delta x_i$ обе суммы, как мы знаем (см. § 27), стремятся к одному и тому же пределу.

Откуда:

$$M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \rho\xi_i \Delta Q_i =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \rho\xi_i f(\xi_i)\,\Delta x_i;$$

а этот последний предел равен интегралу $\rho\int_a^b xf(x)dx$.

Следовательно

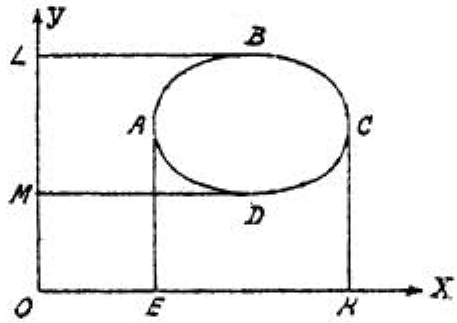
$$M_y = \rho\int_a^b xf(x)dx = \rho\int_a^b xy\,dx.$$

Пусть теперь нам надо вычислить момент площади, ограниченной замкнутой кривой, относительно оси $OY$, причем пусть нам дано, что каждая прямая, параллельная осям координат, пересекает эту кривую не больше, чем в двух точках( черт.109). Проведем касательные параллельные оси $OY$, к кривой, ограничивающей данную фигуру. Пусть это будут: $EA$ и $KC$.

Искомый момент равняется, очевидно, разности моментов площадей $EABCK$ и $EADCK$.

Если уравнение кривой $ABC$ будет $y_1=f_1(x)$, а уравнение кривой $ADC$ будет

$$y_2=f_2(x),$$



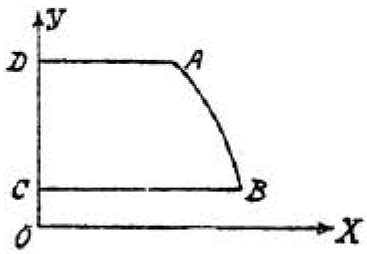
Черт. 109.

то искомый момент будет равен:

$$M_y=\rho\int_{(A)}^{(C)} xy_1\,dx-\rho\int_{(A)}^{(C)} xy_2\,dx= \\ =\rho\int_{(A)}^{(C)} x(y_1-y_2)\,dx.$$

Для того, чтобы вычислить момент площади $ABCD$ (черт. 110) относительно оси, $OX$ решим уравнение кривой $AB$ относительно $x$; пусть при этом получилось $x=\varphi(y)$.

Тогда совершенно аналогичными рассуждениями убедимся, что:



Черт. 110.

$$M_x=\rho\int_{(A)}^{(B)} y\,\varphi(y)\,dy=\rho\int_{(A)}^{(B)} yx\,dy.$$

Если же надо будет вычислить момент площади, ограниченной замкнутой кривой (см.черт. 109) относительно оси $OX$, проведем касательные к этой кривой параллельные оси $OX$, а именно: $BL$ и $DM$ и решим уравнение кривой относительно $X$.

Пусть при этом получится, что уравнение кривой $BCD$ есть $x_1 = \varphi_1(y)$, а уравнение кривой $BAD$ есть $x_2 = \varphi_2(y)$.

Тогда искомый момент равен опять разности моментов:

$$M_x = \rho\int_{(D)}^{(B)} x_1 y\,dy - \rho\int_{(D)}^{(B)} x_2 y\,dy =$$

$$= \rho\int_{(D)}^{(B)} y(x_1 - x_2)\,dy.$$

Теперь уже нетрудно написать формулы для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры. Пусть координаты его будут $X_c$ и $Y_c$.

Плоскую фигуру можно также рассматривать, как систему точек, и поэтому к ней можно применить ту теорему из механики, которая была приведена в предыдущем параграфе.

Согласно этой теореме:

$$\rho Q X_c = M_y = \rho\int_{(A)}^{(C)} x(y_1 - y_2)\,dx,$$

где $Q$ - есть площадь фигуры.

Отсюда:

$$X_c = \frac{\int_{(A)}^{(C)} x(y_1 - y_2)\,dx}{Q} \qquad (1).$$

Совершенно также найдем:

$$\rho Q Y_c = M_x = \rho\int_{(D)}^{(B)} y(x_1 - x_2)\,dy;$$

$$Y_c = \frac{\int_{(D)}^{(B)} y(x_1 - x_2)\,dy}{Q} \qquad (2).$$

Пример. Вычислить координаты центра тяжести четверти эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

расположенной в первом координатном угле.

Берем для вычисления $X_c$ формулу (I). Из уравнения имеем:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Числитель в данном случае равен:

$$\int_0^a xy\,dx=\int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла сделаем подстановку

$$a^2-x^2=z^2$$

$$-2x\,dx=2z\,dz$$

$$x\,dx=-z\,dz$$

при $x=0$; $z=a$ (корень берем со знаком плюс, как и данный радикал); при $x=a$; $z=0$.

Следовательно:

$$\frac{b}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{b}{a}\int_a^0 z\cdot z\,dz=$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a z^2\,dz=\frac{b}{a}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^2b}{3}.$$

$Q$ в данном случае есть четверть площади эллипса; следовательно:

$$Q=\frac{1}{4}\pi ab.$$

Отсюда:

$$X_c=\frac{a^2b}{3}:\frac{\pi ab}{4}=\frac{4a}{3\pi}.$$

По аналогии можно написать выражение для $y_c$:

$$y_c = \frac{4b}{3\pi}.$$

Полученные нами формулы для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры не всегда удобны практически, так как для вычисления обоих координат необходимо решить уравнение кривой и относительно $x$ и относительно $y$, что не всегда легко выполнимо.

Выведем поэтому еще одну формулу, которую с успехом можно применять при решении многих задач.

Пусть нам нужно найти координаты центра тяжести плоской фигуры $ABDC$ (см.черт. 108), ограниченной дугой $AB$ кривой $y=f(x)$, двумя ординатами, соответствующими абсциссам, равным $a$ и $b$, и отрезком оси $OX$. Разобьем обычным способом нашу фигуру на полоски прямыми параллельными оси $OY$ и рассмотрим одну из этих полосок $KMNL$.

Эту полоску можно приближенно считать прямоугольником с основанием $\Delta x_i$ и высотой $MK=y_i$. Центр тяжести прямоугольника, как известно, находится в точке пересечения его диагоналей, а поэтому ордината центра тяжести равна $\frac{1}{2}y_i$. Следовательно, момент этого прямоугольника относительно оси $OX$ равен

$$\rho y_i \Delta x_i \cdot \frac{y_i}{2} = \frac{1}{2}\rho y_i^2 \Delta x_i,$$

где $\rho$ поверхностная плотность.

Сумма моментов всех таких прямоугольников относительно оси $OX$ равная

$$\frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 \Delta x_i,$$

должна приближенно равняться моменту всей фигуры относительно той же оси, который согласно теореме предыдущего параграфа равняется $\rho Q y_c$.

Следовательно:

$$\rho Q Y_c \approx \frac{1}{2} \rho \sum y_i^2 \Delta x_i .$$

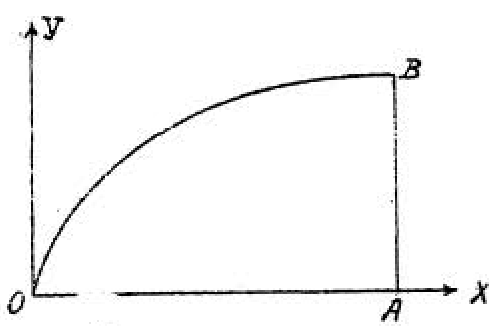
Это равенство приближенное. Оно станет точным, если мы в правой части перейдем к пределу, когда число полосок $n$ станет беспредельно возрастать, а ширина каждой полоски $\Delta x_i$ станет беспредельно убывать. Тогда получим

$$\rho Q Y_c = \frac{1}{2} \rho \int_a^b y^2 dx .$$

Отсюда:

$$Y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{Q} \qquad (3).$$

В качестве примера на применение этой формулы рассмотрим вычисление координат центра тяжести фигуры, ограниченной дугой параболы $y^2=2px$, отрезком оси абсцисс и ординатой, соответствующей абсциссе равной $a$ (черт. 111).




Черт. 111.

Имеем:

$$Y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx}{Q}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^a 2px\,dx = \left[p\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{pa^2}{2}$$

$$Q = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \sqrt{2px}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2p}\cdot a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{2pa} .$$

Если обозначим ординату $AB$ через $b$, то $b=\sqrt{2pa}$; так что:

$$\frac{2}{3} a\sqrt{2ap}=\frac{2}{3}ab.$$

$$y_c=\frac{1}{2}pa^2 : \frac{2}{3}ab=\frac{3ap}{4b},$$

но так как

$$2ap=b^2;\ ap=\frac{1}{2}b^2,$$

то

$$y_c=\frac{3b^2}{8b}=\frac{3}{8}b.$$

Для вычисления $X_c$ воспользуемся формулой (I). Числитель в данном случае будет равен:

$$\int_0^a xy\,dx=\int_0^a x\sqrt{2px}\cdot dx=\sqrt{2p}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^a=$$

$$=\frac{2}{5}a^2\sqrt{2pa}=\frac{2}{5}a^2b,$$

а так как

$$Q=\frac{2}{3}ab,$$

то

$$X_c=\frac{2}{5}a^2b : \frac{2}{3}ab=\frac{3}{5}a.$$

Из формулы (3) очень легко выводится вторая теорема Гюльдена.

Мы имеем:

$$y_cQ=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx.$$

Умножим обе части равенства на $2\pi$; тогда получим:

$$2\pi y_cQ=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Но $\pi\int_a^b y^2\,dx$ есть не что иное, как об'ем тела, образуемого при вращении вокруг оси $OX$ фигуры, ограниченной кривой $AB$ (см. черт. 108) двумя ординатами и отрезком оси $OX$, а $2\pi y_c$ есть как раз длина той окружности, которую описывает центр тяжести этой фигуры при своем вращении вокруг оси $OX$.

Отсюда получается теорема: об'ем тела вращения, описываемого вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры, но ее не пересекающей, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину окружности, которую описывает при вращении центр тяжести этой фигуры.

Примеры для упражнений.

1) Найти центр тяжести площади одной арки циклоиды.

Ответ: $x_c = \pi a$; $y_c = \frac{5}{6} a$.

2) Найти центр тяжести площади, ограниченной осью $OX$ и параболой $y = 2x - x^2$.

Ответ: $y_c = \frac{2}{5}$; $x_c = 1$.

3) Найти центр тяжести площади, ограниченной осью $OX$ и одной веткой синусоиды $y = \sin x$.

Ответ: $x_c = \frac{\pi}{2}$; $y_c = \frac{\pi}{8}$.

## § 36. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ (формулы квадратур).

Мы видели, что для вычисления определенного интеграла надо вычислить неопределенный, но неопределенный интеграл не всегда можно выразить через известные нам до сих пор функции, а в том случае, когда это можно сделать, получается иногда формула очень сложного строения и неудобная для практических вычислений.

Во всех этих случаях приходится вычислять приближенную величину определенного интеграла с необходимой для каждого конкретного случая точностью.

Существует несколько способов приближенного вычисления определенных интегралов. Общая идея некоторых из этих способов заключается в следующем. Вычисление интеграла, как мы знаем, всегда можно заменить вычислением такой площади, которая ограничена двумя ординатами, отрезком оси абсцисс и частью кривой, которая является графическим изображением подинтегральной функции.

Эту площадь разбивают на части прямыми, параллельными оси $OY$, и площадь каждой части заменяют площадью какой-нибудь более простой фигуры, которая получается, если заменить кривую линию, ограничивающую эту площадь, какой-нибудь более простой линией (прямой, параболой).

Рассмотрим более подробно некоторые из этих способов.

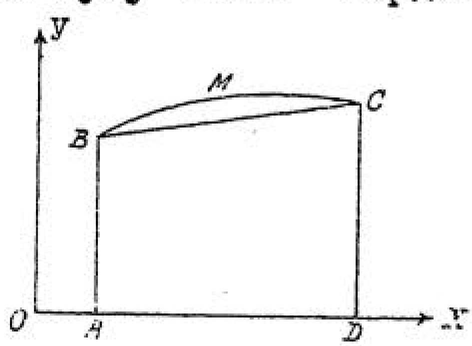
## I. Формула трапеций.

Пусть нам надо вычислить приближенно

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Геометрически это значит, что надо вычислить площадь, ограниченную частью кривой $y=f(x)$, двумя ординатами, соответствующими абсциссам $x=a$ и $x=b$, и отрезком оси абсцисс (черт. 112), т.е. надо вычислить величину площади $ABMCD$. Заменим дугу $BMC$ хордой $BC$ и вычислим площадь трапеции $ABCD$; так как $AB=f(a)$ и $CD=f(b)$, то эта площадь равна

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$



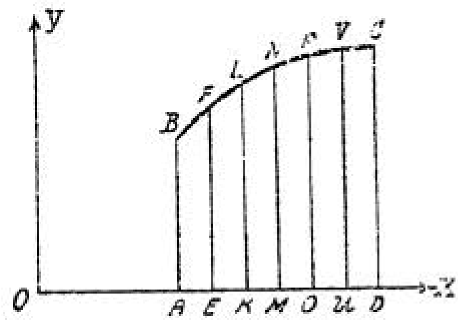
Черт. 112.

Это и дает нам приближенное значение площади фигуры $ABMCD$ и, следовательно, интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Понятно, что этот результат слишком неточен, но мы можем уменьшить ошибку значительно, если разобьем нашу площадь на части прямыми, параллельными оси $OY$ и площадь каждой части приближенно заменим площадью соответствующей трапеции (черт. 113).

Разобьем отрезок $AD$ оси абсцисс на $n$ равных частей и в точках деления восставим перпендикуляры до пересечения с данной кривой. Соединим отрезками прямых соседние точки пересечения этих перпендикуляров с кривой. Тогда наш интеграл можно считать приближенно равным сумме площадей трапеций:



Черт. 113.

$$ABFE, \quad EFLK, \quad KLMN \ldots\ldots UVCD;$$

т.е.:

$$\int_a^b f(x)dx \approx Q_1+Q_2+Q_3+\ldots+Q_n,$$

где через $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_n$ обозначены площади соответствующих трапеций.

Обозначим ординаты

$$AB, EF, KL \ldots CD$$

соответственно через

$$y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$$

$$AE=EK=KM=\ldots\ldots UD=\frac{b-a}{n}.$$

Следовательно:

$$Q_1 = \frac{b-a}{2n}(y_0+y_1)$$

$$Q_2 = \frac{b-a}{2n}(y_1+y_2)$$

$$Q_3 = \frac{b-a}{2n}(y_2+y_3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n = \frac{b-a}{2n}(y_{n-1}+y_n)$$

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+\ldots Q_n =$$
$$=\frac{b-a}{2n}(y_0+2y_1+2y_2+\ldots 2y_{n-1}+y_n)$$

или:

$$Q_1+Q_2+Q_3+\ldots+Q_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$$

Следовательно

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

Это и есть так называемая формула трапеций. Равенство это конечно приближенное, но ошибка будет тем меньше, чем больше мы возьмем $n$, которое можно выбрать совершенно произвольно. Для вычисления ординат $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$, входящих в эту формулу, надо воспользоваться под'интегральной функцией $y=f(x)$.

Вычислим промежуточные значения $X$ в точках $B, F, L, N$ и т.д.

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a+\frac{b-a}{n}$$

$$x_2 = a+2\frac{b-a}{n}$$

$$x_3 = a+3\frac{b-a}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

. . . . . . . . . . . . . . .

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

и подставив эти значения в под'интегральную функцию, получим промежуточные значения под'интегральной функции

$$y_0 = f(x_0);\quad y_1 = f(x_1),\quad y_2 = f(x_2)\ \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots y_i = f(x_i) \text{ и т.д.}$$

В том случае, когда желательно получить более точный результат, можно пользоваться более точной формулой, чем формула трапеций - формулой Лапласа, которую мы приведем здесь без вывода. Эта формула выводится в курсе численного интегрирования.

Только нам надо предварительно познакомиться с некоторыми новыми для нас понятиями.

Разность двух последовательных значений функции $y_{i+1} - y_i$ назовем разностью первого порядка и условимся обозначать ее через $\Delta y_i$. Таким образом

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;\ \Delta y_1 = y_2 - y_1;\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 \quad \text{и т.д.}$$

Разность двух последовательных разностей первого порядка $\Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ назовем разностью второго порядка и условимся обозначать ее через $\Delta^2 y_i$. Таким образом:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0;\quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \qquad \text{и т.д.}$$

Совершенно также строится понятие о разностях порядка выше второго.

Теперь мы можем написать формулу Лапласа:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left\{\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \right.$$

$$\left. + y_4 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} - \frac{1}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{1}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0)\right\}$$

Пример I. Вычислить приближенное значение интеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

взяв $n=10$.

Здесь $y=\frac{1}{1+x^2}$. Вычислим значения функции $y_0$; $y_1$; $y_2$ ..... $y_{10}$.

Будем вычислять эти значения с четырьмя десятичными знаками. Имеем: $b-a=1$; $\frac{b-a}{n}=0,1$.

| | | |
|---|---|---|
| $x_0=0$ | $\frac{y_0}{2}=$ | $0,5000$ |
| $x_1=0,1$ | $y_1=\frac{1}{1,01}=$ | $0,9901$ |
| $x_2=0,2$ | $y_2=\frac{1}{1,04}=$ | $0,9615$ |
| $x_3=0,3$ | $y_3=\frac{1}{1,09}=$ | $0,9174$ |
| $x_4=0,4$ | $y_4=\frac{1}{1,16}=$ | $0,8621$ |
| $x_5=0,5$ | $y_5=\frac{1}{1,25}=$ | $0,8000$ |
| $x_6=0,6$ | $y_6=\frac{1}{1,36}=$ | $0,7353$ |
| $x_7=0,7$ | $y_7=\frac{1}{1,49}=$ | $0,6711$ |
| $x_8=0,8$ | $y_8=\frac{1}{1,64}=$ | $0,6098$ |
| $x_9=0,9$ | $y_9=\frac{1}{1,81}=$ | $0,5525$ |
| $x_{10}=1,0$ | $\frac{y_{10}}{2}=\frac{1}{2,2}=$ | $0,2500$ |

Складывая, получим $7,8498$.

Следовательно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0,1 \cdot 7,8498 = 0,78498.$$

Так как точное значение интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ есть $\frac{\pi}{4}$, то умножив полученный результат на $4$ мы получим приближенное значение числа $\pi$, именно:

$$0,78498 \times 4 = 3,13992.$$

Значение $\pi$ с точностью до пятого десятичного знака есть, как известно 3,14159. Округляя наш приближенный результат, получим 3,14, т.е. два верных десятичных знака. По этому примеру мы можем судить о той точности, которую дает нам формула трапеций.

Посмотрим теперь, какой результат у нас получится, если мы воспользуемся формулой Лапласа:

$y_0 = 1,0000$

$y_1 = 0,9901 \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0 = -0,0099.$

$y_2 = 0,9615 \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1 = -0,0286.$

. . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . .

$y_{n-2} = y_8 = 0,6098$

$y_{n-1} = y_9 = 0,5525 \quad \Delta y_{n-2} = y_{n-1} - y_{n-2} = -0,0573.$

$y_n = y_{10} = 0,5000 \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = -0,0525.$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = -0,0187.$$

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = +0,0048.$$

$$\Delta y_{n-1} - \Delta y_0 = \begin{array}{r} -0{,}0525 \\ +0{,}0099 \\ \hline -0{,}0426 \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} 12 \\ \hline -0{,}0036 \end{array}$$

$$\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0 = \begin{array}{r} +0{,}0048 \\ -0{,}0187 \\ \hline -0{,}0139 \end{array} \;\Big|\; \begin{array}{l} 24 \\ \hline -0{,}0006 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7{,}8498 \\ 0{,}0036 \\ 0{,}0006 \\ \hline 7{,}8540 \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1 \cdot 7{,}8540 = 0{,}7854.$$

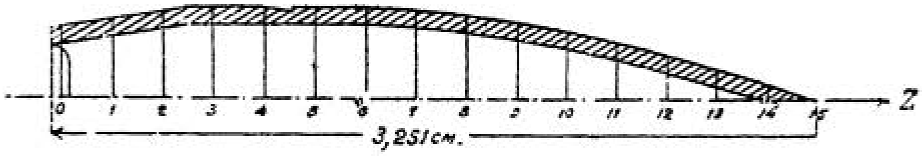
Умножив полученный результат на 4, получим: $0{,}7854 \cdot 4 = 3{,}1416$. Как видим на этот раз получились четыре верных десятичных знака.

Пример 2. Для вычисления об'ема пули нужно вычислить интеграл:

$$\pi \int_0^{3{,}251} R^2 dz,$$

где 3,251 см есть длина пули, а $R$ есть расстояние от точек поверхности пули до ее оси. Ось $Z$ направлена по оси пули.

Пуля здесь рассматривается, как тело вращения вокруг оси $Z$ (черт. 114) и поэтому об'ем вычисляется по формуле для вычисления об'емов тел вращения; только здесь роль $X$ играет $Z$, а роль $Y$ играет $R$ (см. § 32).




Черт. 114.

Для приближенного вычисления этого интеграла вычерчена пуля в масштабе 10 : 1; вся длина пули была разделена на 15 равных частей, и были измерены соответствующие расстояния $R$ x).

Измерения дали следующие результаты

$R_0 = 0{,}310$ $R_8 = 0{,}380$

$R_1 = 0{,}345$ $R_9 = 0{,}360$

$R_2 = 0{,}370$ $R_{10} = 0{,}330$

$R_3 = 0{,}395$ $R_{11} = 0{,}290$

$R_4 = 0{,}395$ $R_{12} = 0{,}246$

$R_5 = 0{,}395$ $R_{13} = 0{,}187$

$R_6 = 0{,}395$ $R_{14} = 0{,}120$

$R_7 = 0{,}390$ $R_{15} = 0{,}040$

Вычислить по этим данным приближенно об'ем пули при помощи формулы трапеций.

В данном случае $\frac{b-a}{n} = \frac{3{,}251}{15} = 0{,}217$.

Вычислим теперь значения под'интегральной функции, приняв во внимание, что здесь под'интегральная функция: $y = R^2$.

$$\frac{y_0}{2} = 0{,}0481$$
$$y_1 = 0{,}1190$$
$$y_2 = 0{,}1436$$
$$y_3 = 0{,}1560$$
$$y_4 = 0{,}1560$$

---

x) См. курс Благонравов и Гуревич. "Боеприпасы стрелкового вооружения".

$$y_5 = 0{,}1560$$
$$y_6 = 0{,}1560$$
$$y_7 = 0{,}1521$$
$$y_8 = 0{,}1444$$
$$y_9 = 0{,}1296$$
$$y_{10} = 0{,}1089$$
$$y_{11} = 0{,}0841$$
$$y_{12} = 0{,}0605$$
$$y_{13} = 0{,}0350$$
$$y_{14} = 0{,}0144$$
$$\frac{y_{15}}{2} = 0{,}0008$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$1{,}6645$$

Следовательно:

$$\int_0^{3,261} R^2\,dz \approx 1{,}6645 . 0{,}217 \approx 0{,}361,$$

а искомый об'ем равняется

$$0{,}361 . 3{,}14 \approx 1{,}133 \text{ см}^3.$$

Примеры для упражнений.

1) Вычислить при помощи формулы трапеций, положив $n=10$, интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = lg 2.$$

Для сравнения даем натуральный $lg 2$ с 5 знаками: 0,69315.

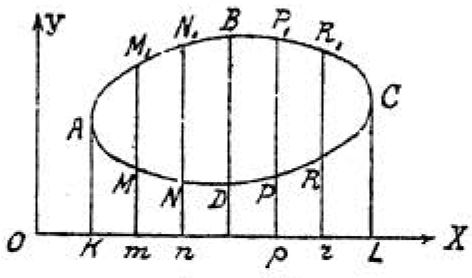
2) Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$$

по формуле трапеций, положив $n=8$; для сравнения даем величину этого интеграла с 5 знаками: 0,83565.

Формулу трапеций можно также применять для вычисления площадей (например, вычисление площади участка земли по его плану). При этом может случиться, что площадь ограничена замкнутой кривой. Покажем, как применить формулу трапеций в этом случае. Пусть надо вычислить площадь фигуры $ABCD$ (черт. 115), причем кривая $ABCD$ пересекается каждой из прямых параллельных оси $OY$ не больше, чем в двух точках.

Проведем касательные к кривой, параллельные оси $OY$ и разобьем площадь на $n$ полосок прямыми, параллельными оси $OY$. Обозначим ординаты $AK$ и $CL$ через $y_0$ и $y_n$ ординаты $mM$, $nN$....$rR$ соответственно через $y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$, ординаты $mM_1$, $nN_1$.....$rR_1$ через $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots Y_{n-1}$.



Черт. 115.

Искомую площадь можно рассматривать, как разность площадей $KABCL$ и $KADCL$.

Вычисляя каждую из этих площадей по формуле трапеций, получим:

$$S = \frac{b-a}{n}\left\{\frac{y_0}{2} + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right\}$$

$$- \frac{b-a}{n}\left\{\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right\},$$

где через $b-a$ обозначена длина отрезка $KL$.

Упростив это выражение, получим

$$S = \frac{b-a}{n}\left\{(Y_1 - y_1) + (Y_2 - y_2) + \ldots + (Y_{n-1} - y_{n-1})\right\}$$

Разности, стоящие в круглых скобках, представляют собой "поперечные" размеры искомой площади, которые измеряются через равные "продольные" расстояния. Обозначая эти разности соответственно через $z_1, z_2, z_3, \ldots$ $\ldots z_{n-1}$, получим:

$$S = \frac{b-a}{n}(z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_{n-1}).$$

Предлагаем читателю теперь решить следующую задачу:

3) Для измерения участка земли сделано 9 поперечных промеров через каждые два метра; эти промеры дали следующие величины (в метрах): 10,3; 12,1; 13,8; 14,6; 16,1; 14,0; 11,7; 9,8; 8,8.

Вычислить площадь данного участка.

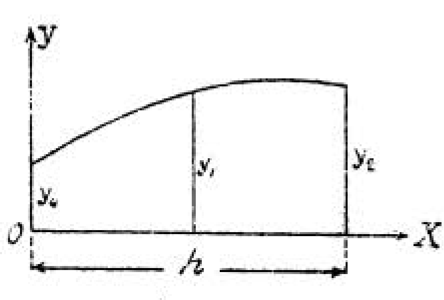
Ответ: 222, 4 кв. м.

Формула Симпсона.

Выведем еще одну формулу для приближенного вычисления определенных интегралов, которая дает более точные результаты, чем формула трапеций. Начнем с доказательства следующей теоремы. Площадь, ограниченная параболой: $y=ax^2+bx+c$, осью $OX$ и двумя ординатами, отстоящими друг от друга на расстояние, равное $h$, равна

$$\frac{h}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

где $y_0$ есть начальная ордината, $y_2$ — конечная, а $y_1$ — соответствующая середине промежутка (черт. 116). Мы уже знаем, что ось этой параболы параллельна оси $OY$. Не нарушая общности, можно считать, что начальная ордината параболы находится на оси ординат, так как если это условие не выполнено, можно сдвинуть систему координат вдоль оси $OX$ на такое расстояние, чтобы это условие выполнялось, и при этом ни площадь, ни ординаты, ни $h$ не изменятся. Таким образом искомая площадь $Q$ равняется:




Черт. 116.

$$Q=\int_0^h(ax^2+bx+c)dx=\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_0^h=$$

$$= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

Подставляя в уравнение параболы

$$y = ax^2 + bx + c$$

вместо $x$ соответственно $0, \frac{h}{2}, h,$ получим:

$$y_0 = c$$

$$y_1 = \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c.$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c.$$

$$y_0 = 4y_1 + y_2 = c + ah^2 + 2bh + 4c + ah^2 + bh + c = 2ah^2 + 3bh + 6c.$$

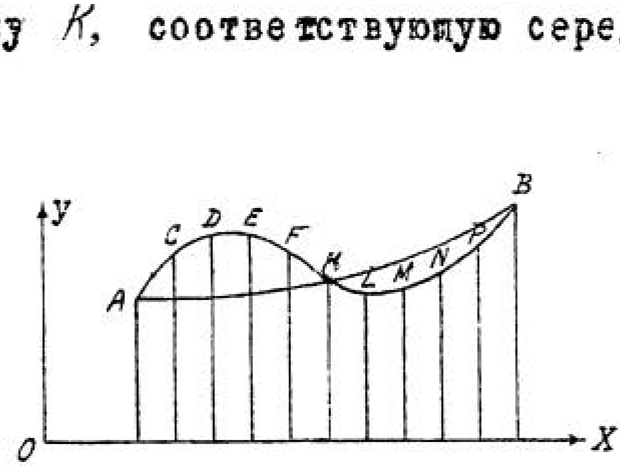
Отсюда

$$2ah^2 + 3bh + 6c = y_0 + 4y_1 + y_2,$$

и, следовательно, искомая площадь:

$$Q = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Представим себе теперь, что нам надо вычислить приближенно интеграл $\int_a^b f(x)dx$, другими словами вычислить приближенно площадь, ограниченную дугой $AB$, кривой $y=f(x)$ двумя ординатами и отрезком оси абсцисс (черт. 117). Возьмем на кривой три точки $A, B$ и точку $K$, соответствующую середине промежут-




Черт. 117.

ка и обозначим ординаты этих трех точек соответственно через $y_0$, $y_1$, $y_2$.

Проведем через эти точки параболу, ось которой будет параллельна оси $OY$. Нетрудно видеть, что это всегда можно сделать, если эти точки не лежат на одной прямой, так как, зная координаты трех точек, можно определить три коэффициента в уравнении параболы. Заменим теперь приближенно искомую площадь площадью, ограниченной теми же двумя ординатами, отрезком оси абсцисс и соответствующей дугой параболы. Так как здесь $h=b-a$, то согласно доказанной теореме:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2). \qquad (1)$$

Этот результат, конечно, весьма неточен. Чтобы получить результат более точный, разобьем нашу площадь на четное число $2n$ полос равной ширины с помощью прямых, параллельных оси $OY$, и обозначим ординаты соответственно по порядку через $y_0, y_1, y_2 \cdots y_{2n-1}, y_{2n}$. Рассмотрим площадь первых двух полосок, ограниченных сверху дугой $ACD$.

Обозначим эту площадь через $Q_1$.

Так как здесь $h=\frac{b-a}{n}$, то применяя формулу (I), получим:

$$Q \approx \frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+y_2).$$

Аналогично найдем для площади следующих двух полосок:

$$Q_2 \approx \frac{b-a}{6n}(y_2+4y_3+y_4).$$

далее:

$$Q_3 \approx \frac{b-a}{6n}(y_4+4y_5+y_6)$$

. . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . .

$$Q_n \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Складывая все эти равенства почленно, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + $$
$$+ 2y_4 + y_5 + 2y_6 + \ldots\ldots 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big\{(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots\ldots + y_{2n-2}) +$$
$$+ 4(y_1 + y_3 + \ldots\ldots + y_{2n-1})\Big\}.$$

Это и есть формула Симпсона.
Для вычисления значения функции $y_0, y_1, y_2, y_4 \ldots\ldots$
$\ldots y_{2n}$, надо воспользоваться равенством $y = f(x)$.
Так как мы знаем, что:

$$x_0 = a; \quad x_1 = a + \frac{b-a}{2n}; \quad x_2 = a + 2\frac{b-a}{2n};$$
$$x_3 = a + 3\frac{b-a}{2n}; \quad \ldots\ldots x_i = a + i\frac{b-a}{2n}, \ldots\ldots$$

то подставив эти значения $x$ в вышеуказанное равенство, получим:

$$y_0 = f(x_0); \quad y_1 = f(x_1); \quad y_2 = f(x_2) \ldots y_i = f(x_i).$$

Формула Симпсона дает более точные результаты, чем формула трапеций, так как там мы заменяем кривую прямой линией, а здесь мы заменяем кривую параболой. Очевидно, что с помощью параболы мы можем ближе подойти к дуге данной кривой, чем с помощью прямолинейного отрезка.

Пример I. Вычислить по формуле Симпсона интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

взяв $2n = 10$.

Здесь можно использовать данные, полученные при вычислении этого интеграла по формуле трапеций; только придется их иначе сгруппировать (см. стр. 210), а именно:

$$b-a=1; \qquad 6n=30; \ \frac{b-a}{6n}=\frac{1}{30}.$$

$$\begin{array}{r}
y_0 = 1{,}0000 \\
y_{10} = 0{,}5000 \\
\hline
1{,}5000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
y_2 = 0{,}9615 \\
y_4 = 0{,}8621 \\
y_6 = 0{,}7353 \\
y_8 = 0{,}6098 \\
\hline
3{,}1687 \\
\times \quad 2 \\
\hline
6{,}3374
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
y_1 = 0{,}9901 \\
y_3 = 0{,}9174 \\
y_5 = 0{,}8000 \\
y_7 = 0{,}6711 \\
y_9 = 0{,}5525 \\
\hline
3{,}9311 \\
\times \quad 4 \\
\hline
15{,}7244
\end{array}$$

Следовательно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{30}\Big\{(y_0+y_{10})+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+ \\ +4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)\Big\}.$$

Подставив наши числа, найдем:

$$\begin{array}{r}
1{,}5000 \\
6{,}3374 \\
15{,}7244 \\
\hline
23{,}5618
\end{array}$$

$$23{,}5618 : 30 = 0{,}7854.$$

Следовательно:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}7854.$$

Умножив это число на 4, получим приближенное значение числа $\pi$:

$\pi \approx 0,7854 \times 4 = 3,1416$, т.е. четыре верных десятичных знака.

## Примеры для упражнений.

1) Исходя из формулы

$$\lg 2 = \int_1^2 \frac{dx}{1+x^2},$$

вычислить $\lg 2$ по формуле Симпсона, взяв $2n = 10$.

2) Вычислить интеграл

$$\int^{1} \frac{dx}{1+x^3}$$

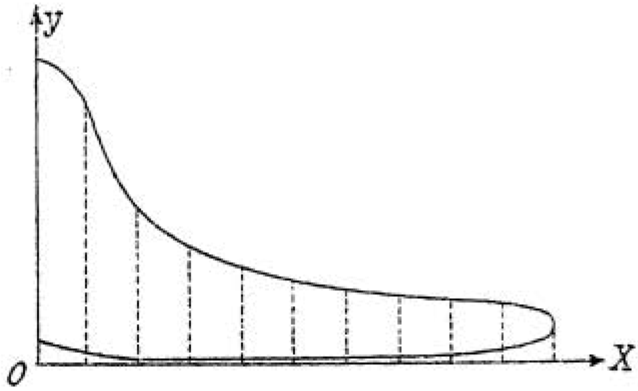
по формуле Симпсона, взяв $2n =$ [illegible]

3) Вычислить интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

по формуле Симпсона, положив $2n = 4$ (для сравнения дадим значение интеграла с 5 знаками: 1,37079).

4) На чертеже 118 изображена так называемая индикаторная диаграмма. Ее площадь имеет значение для вопроса о работе паровой машины. Для вычисления этой площади диаграмму разделили по длине, равной 88,7 мм, на 10 равных частей и произвели 11 поперечных измерений, которые дали следующие величины (в мм):




Черт. 118.

59,8; 51,8; 31,6; 23,8; 19,3;
16,2; 14,1; 12,3; 10,7; 9,2; 0,5.

Вычислить площадь диаграммы.

Ответ: 1950 кв.мм.